北海道大学 2017 年（理・前）第 5 問

座標平面上の 3 点 A(1,0),B(3,1),C(2,2)を頂点とする△ABC の内部および境界を Tとおく。実数aに対して、条件

$$AP^2+BP^2+CP^2 \le a$$

を満たす座位平面上の点 P の全体を Dとする。ただし、AP は点 A と点 P の距離を表す。

(1) Dが少なくとも 1 つの点 P を含むようなaの値の範囲を求めよ。

(2) DがTを含むようなaの値の範囲を求めよ。

(3) (1)のもとで、DがTに含まれるようなaの値の範囲を求めよ。

北海道大学 2017 年（理・前）第 5 問

（回答）

(1) $\mathrm{P}(x_1, y_1)$とおく。

$$\begin{aligned} AP^2+BP^2+CP^2 &= (x_1-1)^2+y_1^2+(x_1-3)^2+(y_1-1)^2+(x_1-2)^2+(y_1-2)^2 \\ &= 3x_1^2-12x_1+3y_1^2-6y_1+19 \\ &= 3(x_1-2)^2+3(y_1-1)^2+4 \end{aligned}$$

最右辺の最小値は 4 なので、求めるaの範囲は$a \ge 4$

(2) Dは$\mathrm{P}_1(2,1)$を中心とする半径$\sqrt{\dfrac{a-4}{3}}$の円周及び円内である。

$\mathrm{P_1B}=\mathrm{P_1C}=1$、$\mathrm{P}_1A=\sqrt{2}$なので、常に$\mathrm{PP}_1 \ge \sqrt{2}$となる$a$の範囲を求めればよい。$\therefore \mathrm{a} \ge 10$

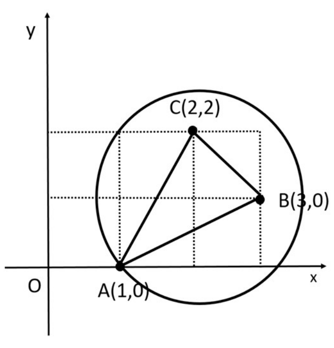
(3) P_1と直線 AB との距離は、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。また、対称性から P_1と直線 AC、直線 AB の距離は等しい。

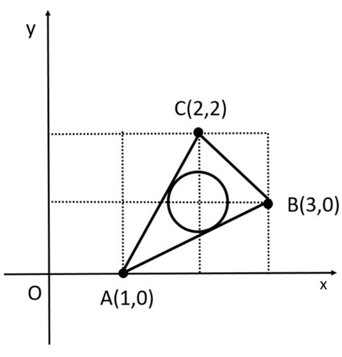
直線 AB の方程式は、$y=\dfrac{1}{2}(x-1) \quad \therefore x-2y-1=0$

直線 AB とP_1の距離は、$\dfrac{|2-2-1|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

常に $\mathrm{P_1P} \le \dfrac{1}{\sqrt{5}}$となればよいので、$a \le \dfrac{23}{5}$

(1)の条件と合わせ、求める範囲は、$4 \le a \le \dfrac{23}{5}$





（解説）

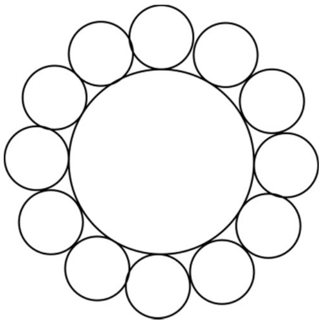
ポピュラーな問題です。図を描きましょう。図からも明らかですが、円が三角形を含む or 三角形が円を含むとはどういう意味かを考えれば、(2)(3)は解けます。(1)は計算するのみです。

岡山大学(理・前)2010年第4問

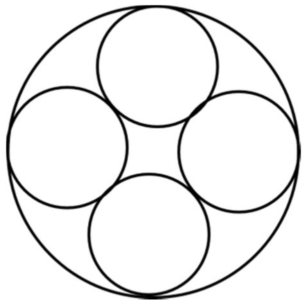
平面上に半径 1 の円Cがある。この円に外接し、さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように、同じ大きさのn個の円を図(例 1)のように配置し、その一つの円の半径をR_nとする。また、円Cに内接し、さらに隣り合う 2 つの円が外接するように、同じ大きさのn個の円を図(例 2)のように配置し、その一つの円の半径をr_nとする。ただし、$n \geq 3$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) R_6, r_6を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} n^2(R_n - r_n)$ を求めよ。ただし、$\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を用いてよい。



例 1　$n = 12$ の場合



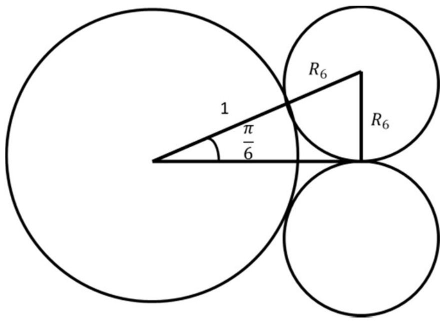
例 2　$n = 4$ の場合

岡山大学(理・前)2010年第4問

（回答）

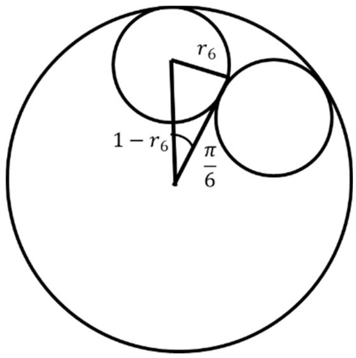
(1) 右図より、$\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{R_6}{1 + R_6}$　　$\therefore R_6 = 1$

また、$\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{r_6}{1 - r_6}$　　$\therefore r_6 = \dfrac{1}{3}$



(2) (1)と同様に $\sin\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{R_n}{1 + R_n} = \dfrac{r_n}{1 - r_n}$

これより、$R_n = \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1 - \sin\frac{\pi}{n}}$,　　$r_n = \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1 + \sin\frac{\pi}{n}}$



$$n^2(R_n - r_n) = n^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1 - \sin\frac{\pi}{n}} - \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1 + \sin\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{2n^2}{\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\right)\left(1 + \sin\frac{\pi}{n}\right)}\sin^2\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{2n^2}{\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\right)\left(1 + \sin\frac{\pi}{n}\right)}\sin^2\frac{\pi}{n} = \frac{2\pi^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^2$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} n^2(R_n - r_n) = 2\pi^2$

（解説）

円に円が内接・外接する頻出の設定です。良問ですが易しめです。難関大では、もう少しひねりがあり、難易度も上がるでしょう。

東京大学(文・前)2009年第1問

座標平面において原点を中心とする半径 2 の円をC_1とし、点$(1,0)$を中心とする半径 1 の円をC_2とする。

また、点(a,b)を中心とする半径tの円をC_3が、C_1に内接し、かつC_2に外接すると仮定する。

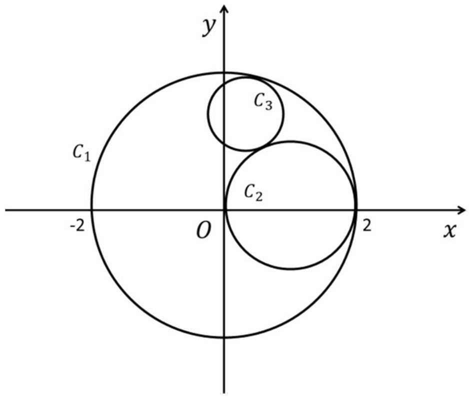
ただし、bは正の実数とする。

(1) a,bをtを用いて表せ。また、tのとり得る値の範囲を求めよ。

(2) tが(1)で求めた範囲を動くとき、bの最大値を求めよ。

東京大学(文・前)2009年第1問

（回答）



(1) C_2とC_3が外接するので、$(a-1)^2+b^2=(1+t)^2$

C_3がC_1に内接するので、$a^2+b^2=(2-t)^2$

これらより、$a=2-3t,$

$b^2=-8t(t-1)$

$b^2>0$ より、$0<t<1$ であり、また、$b=\sqrt{-8t(t-1)}$

(2) $b=\sqrt{-8t(t-1)}=\sqrt{-8\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}}$

$\therefore$ bは $\mathrm{t}=\frac{1}{2}$ で最大値をとり、その値は$\sqrt{2}$

（解説）

頻出の設定です。図を描いて、内接・外接より円の中心間距離について等式を作れば求まります。

(2)も 2 次関数の最大値である。いずれも内容は基礎的で難関大受験生は完答必須の内容。

京都大学(理・前)1999年第1問

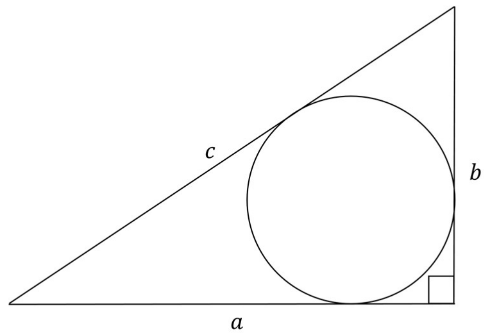
直角三角形に半径rの円が内接していて、三角形の3辺の長さの和と円の直径との和が2となっている。このとき以下の問いに答えよ。

(1) この三角形の斜辺の長さをrで表せ。

(2) rの値が問題の条件を満たしながら変化するとき、この三角形の面積の最大値を求めよ。

京都大学(理・前)1999年第1問

（回答）



(1) 右図のように三角形の3辺の長さをa,b,cとする。

三角形の3辺の長さの和と円の直径との和が2より、

$a+b+c+2r=2\cdots$①

三角形の面積に関して、

$\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{1}{2}ab \quad \therefore a+b=\frac{ab}{r}-c\cdots$②

また、直角三角形なので

$a^2+b^2=c^2\cdots$③

②の両辺を2乗して、$a^2+b^2=\frac{a^2b^2}{r^2}-\frac{2abc}{r}+c^2-2ab$

③と合わせて、$ab\left(\frac{ab}{r^2}-\frac{2c}{r}-2\right)=0\cdots$④

①−②より、$2r+\frac{ab}{r}=2 \quad \therefore \frac{ab}{r}=2-2r$

これを④に代入して、$\frac{2ab}{r}(1-2r-c)=0 \quad \therefore c=1-2r$

(2) (1)の結果を①に代入して、$a+b=1$

三角形の面積は、$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a(1-a)=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}$であり、$a=\frac{1}{2}$のとき最大値$\frac{1}{8}$をとる。

次に、このときa,b,c,rが題意を満たすことを確認する。

$a=\frac{1}{2}$より、$b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{\sqrt{2}},r=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$となることから、題意を満たし求める最大値は$\frac{1}{8}$

（解説）

三角形の内接円という頻出の設定ですが、京大にしては平易な問題。

図形的な関係から、$(a-r)+(b-r)=c$としてもいいです。

(2)は単純に2次関数になります。単純に最大値が$\frac{1}{8}$となるだけでは不十分で、

確かにそのとき題意を満たしていることはいう必要があるでしょう。$a=\frac{1}{2}$というのがありえるのか、

具体的にa,b,c,rを求めれば十分でしょう。