

京都大学 2008 年(理・前)第 5 問

次の式で与えられる底面の半径が 2、高さが 1 の円柱 C を考える。

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y = 1$ を含み、 xy 平面と 45° の角をなす平面のうち、点 $(0, 2, 1)$ を通るものを H とする。

円柱 C を平面 H で二つに分けるときの、点 $(0, 2, 0)$ を含む方の体積を求めよ

京都大学 2008 年(理・前)第 5 問

(回答)

円柱 C を平面 H で二つに分け、点 $(0, 2, 0)$ を含む方を P とする。

xy 平面上の直線 $y = 1$ を含み、 xy 平面と 45° の角をなす平面は、 $y = 1 \pm z$ となる。

$(0, 2, 1)$ を通るものは、 $y = 1 + z$ である。

P は、 $1 \leq y \leq 2$ の領域のみに含まれる。

平面 $y = t$ ($1 \leq t \leq 2$) での C の切り口は長方形であり、 H は直線 $z = t - 1$ である。

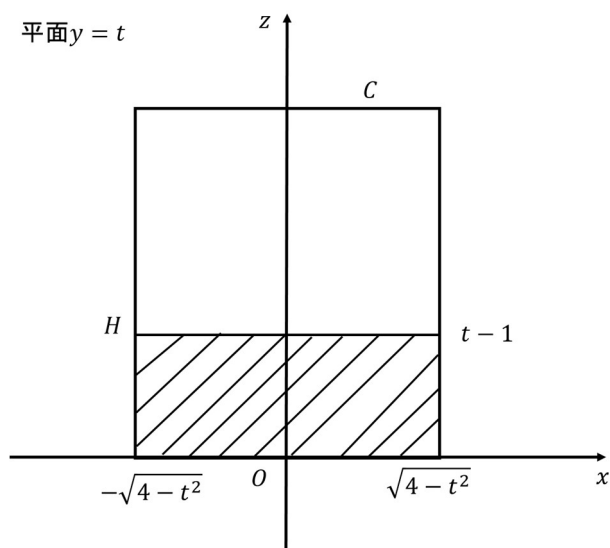
求める体積は、 $\int_1^2 2\sqrt{4-t^2} \cdot (t-1)dt$ である。

$$\text{ここで、} \int_1^2 t\sqrt{4-t^2} dt = \left[-\frac{1}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \sqrt{3}$$

$\int_1^2 \sqrt{4-t^2} dt$ は、扇形の面積から三角形の面積を引いて、

$$\int_1^2 \sqrt{4-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{求める面積は、} 2\sqrt{3} - 2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$$



(解説)

超頻出と言っても過言ではない問題。円柱の底面に平行な平面での切り口は円であり、底面に垂直な平面での切り口は長方形になります。題意の立体が、 $1 \leq y \leq 2$ に含まれるのは自明ですね。

積分する際、どの平面での切り口を考えるかで計算量が違います。考え方は丸暗記していいレベルです。

東北大学 2013 年(理・前)第 6 問

半径 1 の円を底面とする高さ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある。底面の円の中心を O とし、直径を 1 つとり AB とおく。

AB を含み底面と 45° の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けると、
 体積の小さい方の部分の V とする。

- (1) 直径 AB と直交し、 O との距離が t ($0 \leq t \leq 1$) であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。
- (2) V の体積を求めよ。

東北大学 2013 年(理・前)第 6 問

(回答)

(1) 直線 AB を y 軸、底面を含む平面内かつ AB に直交し O を通る直線を x 軸とし、
 x 軸と y 軸の両方に直交し O を通る直線を z 軸とする。(即ち右図)

そうすると、直円柱を分割する題意の平面は $y = x$ とおける。

平面 $x = t$ での切り口を考えればよい。

直円柱の底面に垂直な平面での切り口は長方形である。

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$ のとき、

切り口は、右図の三角形なので、 $S(t) = \frac{1-t^2}{2}$

(ii) $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、

切り口は、右図の台形なので、

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-t^2} \right) = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}} - \frac{1}{4}$$

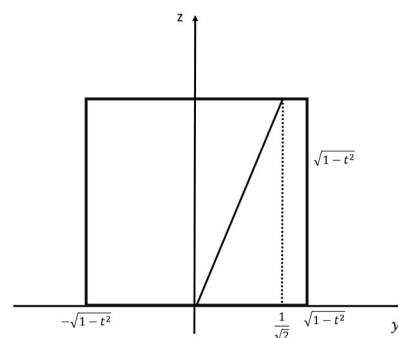
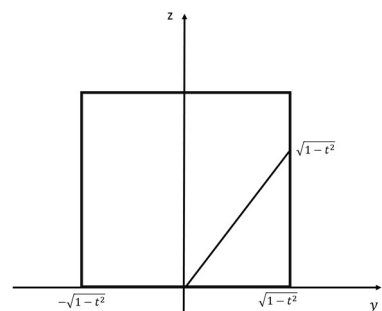
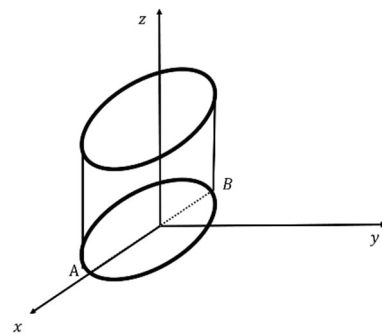
$$(2) \text{ 対称性より、} V = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\sqrt{\frac{1-t^2}{2}} - \frac{1}{4} \right) dt + 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(\frac{1-t^2}{2} \right) dt$$

$$\text{ここで、} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}, \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{8} \pi + \frac{2}{3} - \frac{5}{12} \sqrt{2}$$

(解説)

円柱を平面で切る問題です。難関大では底面にも直交でもなく平行でもない平面で切るタイプがよくあり、
 本問もその類です。座標軸は回答のように設定するのが普通でしょう。平面 $x = t$ で円柱を切れば、
 長方形であり円柱を切断する題意の平面は直線になります。本問は、 t の値により切り口の形が変わるため、
 場合分けが必要です。(2) では(1) の結果を積分し、対称性から 2 倍するのみです。計算量もそれほど
 多くないことから、医学部生は完答必須。それ以外でも(1) は確実に球や円柱等ありふれた立体を切断したり、
 共通部分を考えたり等難関大では頻出です。いくつかのパターンがありますので、それを演習しておきましょう。
 そうすれば、パターンから外れるものについても、少なくとも手付かずはならないでしょう。



大阪市立大学 2017 年(理・前)第 1 問

半径 1 の円柱を、底面の直径を含み底面と角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) をなす平面で切ることができる小さい方の立体を考える。

ただし、円柱の高さは $\tan \alpha$ 以上であるとする。次の問いに答えよ。

- (1) この立体の体積 V を求めよ。
- (2) 切り口の面積 A を求めよ。
- (3) この立体の側面積 B を求めよ。

大阪市立大学 2017 年(理・前)第 1 問

(回答)

底面の中心を原点、直径が x 軸に含まれるとする。そうすると、題意の切断は平面 $z = y \tan \alpha$ での切断となる。

(1) 題意の立体の平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq \tan \alpha$) による切り口は、右図の斜線部分となり、

図のように θ をおくと、扇形の面積から三角形の面積を引くことにより、切り口の面積 S は、

$$S = 2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \right\} = \frac{\pi}{2} - \theta - \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{t}{\tan \alpha} \text{ なので、} \cos \theta d\theta = \frac{1}{\tan \alpha} dt$$

$$V = \int_0^{\tan \alpha} S dt = \tan \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta - \sin \theta \cos \theta \right) \cos \theta d\theta$$

$$\text{ここで、} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \cos \theta d\theta = \left[\frac{\pi}{2} \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos \theta d\theta = [\theta \sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{2} + [\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \left[\frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \text{ なので、} V = \tan \alpha \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \tan \alpha$$

(2) 切断に含まれ、原点を通り x 軸に垂直な p 軸を考えると、 $dp = \frac{dt}{\sin \alpha}$

切り口は右図のようになるので、

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{1}{\cos \alpha}} 2 \cos \theta dp = \int_0^{\tan \alpha} 2 \cos \theta \frac{dt}{\sin \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\cos \alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{2}{\cos \alpha} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2 \cos \alpha} \end{aligned}$$

(3) 題意の立体の側面の平面 $z = t$ での断面は(1)の図の弧であり、その長さは $2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \pi - 2\theta$ なので、

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\tan \alpha} (\pi - 2\theta) dt = \tan \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2\theta) \cos \theta d\theta = \tan \alpha \left\{ [\pi \sin \theta - 2\theta \sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \theta d\theta \right\} \\ &= 2 \tan \alpha [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \tan \alpha \end{aligned}$$

(解説)

円柱を平面で切る問題です。円柱や球ではどこかの角度を置いて議論するのが定石であり、 θ を置いて進めます。断面積を求めてそれを積分です。どの断面で考えるかは、(3)があることから、 z 軸に垂直な平面を考えましたが、体積だけであれば、 y 軸に垂直な平面の方が楽です。(2)では側面の切断面の点と y 軸との距離を定数倍すると半円になることからとしてもいいでしょう。(3)は弧長を積分するのみ。時間はある程度あるとは言え、府立大レベルは完答率は高くないだろうが、演習の価値のある良問。

