

東京工業大学1994年(前)第3問

(1) 定積分 $\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$ を求めよ。

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx$ を求めよ。

東京工業大学1994年(前)第3問

(回答)

$$\begin{aligned} (1) \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx &= [-e^{-x} \sin x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x \, dx \\ &= [-e^{-x} \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx \\ &= \frac{1}{e^{\pi}} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{\pi}} + 1 \right)$$

(2) k を 0 以上の整数として、

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx &= [-e^{-x} \sin x]_{k\pi}^{(k+1)\pi} + \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \cos x \, dx \\ &= [-e^{-x} \cos x]_{k\pi}^{(k+1)\pi} - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx \\ &= \frac{-1}{e^{(k+1)\pi}} \cos(k+1)\pi + \frac{1}{e^{k\pi}} \cos k\pi - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx \\ &= \frac{(-1)^k}{e^{(k+1)\pi}} + \frac{(-1)^k}{e^{k\pi}} - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx \end{aligned}$$

$$\text{これより、} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(-1)^k}{e^{(k+1)\pi}} + \frac{(-1)^k}{e^{k\pi}} \right\} \text{なので、}$$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{e^{(k+1)\pi}} + \frac{1}{e^{k\pi}} \right\} = \frac{1}{2e^{k\pi}} \left(\frac{1}{e^{\pi}} + 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{\pi}} + 1 \right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{e^{k\pi}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{\pi}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{\pi}}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1} \end{aligned}$$

(解説)

超頻出とまではいきませんが、たまに出題される減衰曲線です。部分積分しか思いつかないですね。

難関大受験生は(1)を落とすわけにはいかない。(2)まで完答できれば、合格がかなり近づくだろう。

$\sin$ 関数の周期性を念頭に。

京都大学2001年(理・前)第6問

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| dx \text{ を求めよ。}$$

京都大学2001年(理・前)第6問

(回答)

k を 0 以上の整数として、

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx &= [-e^{-x} \sin x]_{k\pi}^{(k+1)\pi} + \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \cos x \, dx \\ &= [-e^{-x} \cos x]_{k\pi}^{(k+1)\pi} - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx \\ &= \frac{-1}{e^{(k+1)\pi}} \cos(k+1)\pi + \frac{1}{e^{k\pi}} \cos k\pi - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx \\ &= \frac{(-1)^k}{e^{(k+1)\pi}} + \frac{(-1)^k}{e^{k\pi}} - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx \end{aligned}$$

$$\text{これより、} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(-1)^k}{e^{(k+1)\pi}} + \frac{(-1)^k}{e^{k\pi}} \right\} \text{なので、}$$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{e^{(k+1)\pi}} + \frac{1}{e^{k\pi}} \right\} = \frac{1}{2e^{k\pi}} \left(\frac{1}{e^\pi} + 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^\pi} + 1 \right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{e^{k\pi}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^\pi} + 1 \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e^\pi}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} \end{aligned}$$

(解説)

東工大 1994 年(前)第 3 問と全く同じ極限です。sin 関数の周期性を念頭に。

熊本大学(理・前)2015年第4問

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)と定めるとき、以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

熊本大学(理・前)2015年第4問

(回答)

$$(1) a_{n+1} = \int_0^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx = a_n + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx$$

$$\begin{aligned} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx &= [-e^{-x} \sin x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \cos x dx = [-e^{-x} \cos x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \\ &= -\frac{1}{e^{(n+1)\pi}} \cos(n+1)\pi + \frac{1}{e^{n\pi}} \cos n\pi - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \\ &= -\frac{1}{e^{(n+1)\pi}} (-1)^{n+1} + \frac{1}{e^{n\pi}} (-1)^n - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{e^{(n+1)\pi}} (-1)^{n+1} + \frac{1}{e^{n\pi}} (-1)^n \right\} \text{なので、}$$

$$a_{n+1} - a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{(n+1)\pi}} + \frac{1}{e^{n\pi}} \right) \cdots \textcircled{1}$$

$$(2) \textcircled{1} \text{を变形すると、} e^{(n+1)\pi} a_{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^\pi}{1-e^\pi} = e^\pi \left(e^{n\pi} a_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^\pi}{1-e^\pi} \right)$$

$$\left\{ e^{n\pi} a_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^\pi}{1-e^\pi} \right\} \text{は等比数列なので、} a_n = \frac{1}{2e^{n\pi}} \cdot \frac{1+e^\pi}{1-e^\pi} + \frac{1}{e^\pi} \left(e^\pi a_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^\pi}{1-e^\pi} \right)$$

$$\text{ここで、} \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx = [-e^{-x} \sin x]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x} \cos x dx = [-e^{-x} \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx$$

$$= \frac{1}{e^\pi} + 1 - \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx \quad \therefore a_1 = \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e^\pi} \right)$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2e^{n\pi}} \cdot \frac{1+e^\pi}{1-e^\pi} + \frac{1}{e^\pi} \left\{ e^\pi \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e^\pi} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^\pi}{1-e^\pi} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^\pi}{1-e^\pi} \left(\frac{1}{e^{n\pi}} - 1 \right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^\pi}{1-e^\pi} \left(\frac{1}{e^{n\pi}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1}.$$

(解説)

部分積分が鍵、 $\left\{ e^{n\pi} a_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^\pi}{1-e^\pi} \right\}$ が等比数列であることが見出されます。(2)まで行ければ、(3)はおまけ。

(2)は、 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k-1})$ とした方がスマートだったかもしれません。頻出の積分形ですが、

旧帝大以外では、医学部生を除き完答は難しいだろう。言い換えれば、それ以外は完答したい。

早稲田大学(理工・前)2007年第3問

曲線 $y = e^{-x}$ と $y = e^{-x}|\cos x|$ で囲まれる図形のうち、 $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ を満たす部分の面積を a_n とする ($n = 1, 2, 3, \dots$)。以下の問いに答えよ。

- (1) $\int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x}(p \sin x + q \cos x) + C$ を満たす定数 p, q を求めよ。ただし、 C は積分定数である。
- (2) a_1 の値を求めよ。
- (3) a_n の値を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ を求めよ。

早稲田大学(理工・前)2007年第3問

(回答)

- (1) 与式の両辺を x で微分して、 $e^{-x} \cos x = e^{-x} \cos x (p - q) + e^{-x} \sin x (-p - q)$

これより、 $p - q = 1, -p - q = 0$ とすると、 $p = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{2}$ になり、求める答えである。

- (2) $e^{-x} - e^{-x}|\cos x| = e^{-x}(1 - |\cos x|)$ とより、 $y = e^{-x}$ と $y = e^{-x}|\cos x|$ の共有点の x 座標は、整数 n を用いて $n\pi$ とおけ、グラフの概形は右図の通り。

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^\pi (e^{-x} - e^{-x}|\cos x|) dx = \int_0^\pi e^{-x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-x} \cos x \, dx \\ &= [-e^{-x}]_0^\pi - \left[\frac{1}{2} e^{-x} \sin x - \frac{1}{2} e^{-x} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} e^{-x} \sin x - \frac{1}{2} e^{-x} \cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= -e^{-\pi} + 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\pi} - \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} e^{-\pi} - e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \, a_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (e^{-x} - e^{-x}|\cos x|) dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} dx - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\cos x| dx \\ &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} dx - \left| \int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} e^{-x} \cos x \, dx \right| - \left| \int_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \cos x \, dx \right| \\ &= [-e^{-x}]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \left| \left[\frac{1}{2} e^{-x} \sin x - \frac{1}{2} e^{-x} \cos x \right]_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \right| - \left| \left[\frac{1}{2} e^{-x} \sin x - \frac{1}{2} e^{-x} \cos x \right]_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+1)\pi} \right| \\ &= -e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi} - \left| \frac{(-1)^n}{2} e^{-(n+\frac{1}{2})\pi} + \frac{(-1)^n}{2} e^{-n\pi} \right| - \left| \frac{(-1)^n}{2} e^{-(n+1)\pi} - \frac{(-1)^n}{2} e^{-(n+\frac{1}{2})\pi} \right| \\ &= -e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi} - \frac{1}{2} e^{-(n+\frac{1}{2})\pi} - \frac{1}{2} e^{-n\pi} + \frac{1}{2} e^{-(n+1)\pi} - \frac{1}{2} e^{-(n+\frac{1}{2})\pi} \\ &= -\frac{1}{2} e^{-(n+1)\pi} + \frac{1}{2} e^{-n\pi} - e^{-(n+\frac{1}{2})\pi} = e^{-n\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-\pi} + \frac{1}{2} - e^{-\frac{\pi}{2}} \right) = e^{-n\pi} a_1 \end{aligned}$$

$$(4) \, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{-k\pi} a_1 = a_1 \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi}} = \frac{1}{e^{\pi} - 1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{\pi} - e^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

(解説)

(1) は常套手段の部分積分では誘導に乗りました。(2)(3) はなかなかの計算量になりますが、手付かずにはならないようにしたい。(4) はおまけ。東大・京大・東工大・医学部の滑り止めの受験生はある程度手がつき、それ以外の受験生は手がついたとしても(1)のみといった程度であろう。