

東京大学1974年(理・前)第2問

長さ l の線分が、その両端を放物線 $y = x^2$ の上にのせて動く。この線分の中点 M が x 軸にもっとも近い場合の M の座標を求めよ。ただし、 $l \geq 1$ とする。

東京大学1974年(理・前)第2問

(回答)

題意の線分の両端を $(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2) (\alpha < \beta)$ とする。

M を (X, Y) とすると、 $X = \frac{\alpha + \beta}{2} \dots \textcircled{1}, Y = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \dots \textcircled{2}$ となる。

線分の長さが l なので、 $l^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = (\alpha - \beta)^2 \{1 + (\alpha + \beta)^2\} = (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \{1 + (\alpha + \beta)^2\}$

また、 $\textcircled{1}$ より、 $4X^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 2Y + 2\alpha\beta \therefore 2\alpha\beta = 4X^2 - 2Y$ なので、

$$l^2 = (2Y - 4X^2 + 2Y)(1 + 4X^2) = 4(Y - X^2)(1 + 4X^2) \therefore Y = \frac{l^2}{4(1 + 4X^2)} + X^2$$

$f(X) = \frac{l^2}{4(1 + 4X^2)} + X^2$ とおくと、

$$f'(X) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{8l^2 X}{(1 + 4X^2)^2} + 2X = 2X \left\{ -\frac{l^2}{(1 + 4X^2)^2} + 1 \right\} = 2X \cdot \frac{(2X + \sqrt{l-1})(2X - \sqrt{l-1})(4X^2 + 1 + l)}{(1 + 4X^2)^2}$$

(i) $l > 1$ のとき

X		$-\frac{\sqrt{l-1}}{2}$		0		$-\frac{\sqrt{l+1}}{2}$	
$f'(X)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(X)$	$\searrow$	$\frac{l}{2} - \frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{l^2}{4}$	$\searrow$	$\frac{l}{2} - \frac{1}{4}$	$\nearrow$

M が $\left(\pm \frac{\sqrt{l-1}}{2}, \frac{l}{2} - \frac{1}{4} \right)$ のとき、 x 軸にもっとも近くなる。

(ii) $l = 1$ のとき、 M が $\left(0, \frac{1}{2} \right)$ のとき、 x 軸にもっとも近くなる。

(解説)

1974 年と非常に古い問題ですが、放物線上に 2 点を配置して、何かしらの議論を行う問題は、近年でも多く出題されており、2 点間の長さを固定したうえで議論という形もまだまだ出題される可能性がある。

中点の軌跡を考えるために、与えられている条件から X, Y, l の関係を見出しました。 X は任意の値をとることができるので、それを動かして Y の最小値を求めれば、そのときの (X, Y) が求める座標となります。

京都大学(理・前)1999年第1問

放物線 $y = x^2$ の上を動く 2 点 P、Q があって、この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき、PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。

京都大学(理・前)1999年第1問

(回答)

$P(t, t^2), Q(s, s^2) (t \leq s)$ とする。

PQ が囲む部分の面積が 1 より、 $\frac{1}{6}(s-t)^3 = 1 \therefore s-t = \sqrt[3]{6} \dots \textcircled{1}$ 。

$$R(X, Y) \text{ とすると、} X = \frac{s+t}{2}, Y = \frac{s^2+t^2}{2}$$

これより、 $2X = s+t \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より、} s = X + \frac{\sqrt[3]{6}}{2}, t = X - \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$$

$$Y = \frac{\left(X + \frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^2 + \left(X - \frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^2}{2} = X^2 + \frac{\sqrt[3]{36}}{4}$$

$$\therefore \text{求める方程式は、} y = x^2 + \frac{\sqrt[3]{36}}{4}$$

(解説)

放物線上に 2 点を配置して何かしらの議論を行う問題は、東大でも頻出です。

難関大では避けては通れない問題。しかし、本問は穏やかです。完答必須。P、Q の x 座標を s, t と置き、囲む面積が 1 であることと R は PQ の中点であることを使います。式変形も穏やか。

東京大学(理・前)2004年第1問

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の3点P、Q、Rが次の条件を満たしている。

$\triangle PQR$ は一辺の長さが a の正三角形であり、点P、Qを通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき、 a の値を求めよ。

東京大学(理・前)2004年第1問

(回答)

$q \geq p$ として、 $P(p, p^2)$ 、 $Q(q, q^2)$ 、PQの中点をMとする。

直線PQの傾きが $\sqrt{2}$ より、 $\frac{q^2 - p^2}{q - p} = q + p = \sqrt{2} \cdots \textcircled{1}$

PQ = a より、 $q - p = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdots \textcircled{2}$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MR} = \left(\frac{p+q}{2}, \frac{p^2+q^2}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (\mp\sqrt{2}, \pm 1) = \left(\frac{p+q}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{2} a, \frac{p^2+q^2}{2} \pm \frac{a}{2} \right)$$

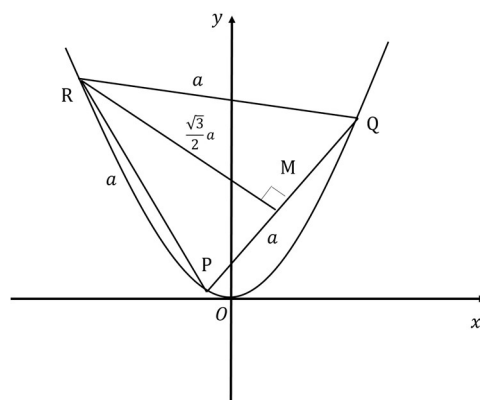
ここで、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ の辺々を2乗して引くと、 $4pq = 2 - \frac{a^2}{3} \therefore 2pq = 1 - \frac{a^2}{6}$

$$\overrightarrow{OR} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (a \mp 1), \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{6} \right) \pm \frac{a}{2} \right)$$

これが題意の放物線上にあるので、

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{6} \right) \pm \frac{a}{2} = \frac{1}{2} (a \mp 1)^2 \therefore \frac{5}{12} a^2 = \pm \frac{3}{2} a$$

$$a > 0 \text{ より、} a = \frac{18}{5}$$



(解説)

東大で頻出の放物線上に複数の点を配置する問題です。傾きから $\textcircled{1}$ が求まります。

PQの長さから、PQの x 座標の差が求まり、 $\textcircled{2}$ のようになります。MPはPQに直交していることから、Rの座標が上記のようになります。また、P、Q、Rの位置関係は2通り考えられますが、計算すると1通りしかないことがわかります。

PRの傾きを三角関数の加法定理を使って求めてもいいですが、中点からのアプローチの方が計算量が少なくても済みます。Rの座標をどのようにして求めるかが鍵であり、そこさえクリアできれば、すんなり行くことから、部分点ではなく0点か完答かになるような問題です。

東京大学(理・前)2008年第4問

放物線 $y = x^2$ に 2 点 P、Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

- (1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で h を表せ。
 (2) L を固定したとき、 h がとり得る値の最小値を求めよ。

東京大学(理・前)2008年第4問

(回答)

(1) $s \geq t$ として、 $P(t, t^2)$ 、 $Q(s, s^2)$ とおくと、

$$\text{題意より、} h = \frac{1}{2}(s^2 + t^2), m = \frac{s^2 - t^2}{s - t} = s + t,$$

$$L = \sqrt{(s - t)^2 + (s^2 - t^2)^2} = (s - t)\sqrt{1 + (s + t)^2} = (s - t)\sqrt{1 + m^2}$$

$$\text{これより、} L^2 = (s - t)^2(1 + m^2) = (m^2 - 4ts)(1 + m^2) \therefore ts = -\frac{1}{4}\left(\frac{L^2}{1 + m^2} - m^2\right)$$

$$h = \frac{1}{2}\{(t + s)^2 - 2ts\} = \frac{1}{4}\left(m^2 + \frac{L^2}{1 + m^2}\right)$$

$$(2) u = m^2 + 1 \text{ とおくと、} h = \frac{1}{4}\left(u - 1 + \frac{L^2}{u}\right) (u \geq 1)$$

$$\text{右辺を } f(u) \text{ とおくと、} f'(u) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{L^2}{u^2}\right)$$

$$(i) L < 1 \text{ のとき、} f'(u) > 0 \text{ なので、} h \text{ の最小値は } f(1) = \frac{L^2}{4}$$

(ii) $L \geq 1$ のとき、

u	1		L	
$f'(u)$		−	0	+
$f(u)$		↘	$\frac{2L - 1}{4}$	↗

$$\text{増減表より、} h \text{ の最小値は } \frac{2L - 1}{4}$$

$$\text{以上より、} h \text{ の最小値は } \begin{cases} \frac{L^2}{4} (L < 1) \\ \frac{2L - 1}{4} (L \geq 1) \end{cases}$$

(解説)

標準的な問題です。(1)は、傾き、距離、中点を式で表せば、後は計算するのみです。

(2)は、変数を置きなおしました方が楽ですが、そのままいっても構いません。

単純に微分するのみで、 L の値によって極値の有無が変わります。難関大受験生は、確実に正解したい。