信州大学(理・前)2016年第4問

nを 2 以上の自然数とする。n人でじゃんけんをする。各人はグー、チョキ、パーをそれぞれ$\frac{1}{3}$の確率で出すものとする。勝者が決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし、負けた人はその後のじゃんけには参加しない。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 1 回目のじゃんけんで、勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

(2) 1 回目のじゃんけんで、あいこになる確率を求めよ。

(3) $n=5$ のとき、ちょうど 2 回のじゃんけんで、勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

信州大学(理・前)2016年第4問

（回答）

(1) n人それぞれが唯一の勝者となる場合の数は等しく 3 通りであるので、求める確率は、$\frac{3n}{3^n}=\frac{n}{3^{n-1}}$

(2) n人の手が 2 種類の確率は、$3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

あいこになるのは、n人の手が全て同じか、3 種類すべてが含まれるときなので、

求める確率は、$1-3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=1-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) 1 回目があいこで、2 回目で勝者が 1 人に決まる確率は、$\left\{1-2\left(\frac{2}{3}\right)^4+2\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}\frac{5}{3^4}=\frac{85}{2187}$

1 回目に$k(2\leq k\leq n-1)$人の勝者が出て、2 回目で勝者が 1 人になる確率は、${}_5C_k\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\frac{k}{3^{k-1}}$,

求める確率は、$\frac{85}{2187}+\sum_{k=2}^{4}{}_5C_k\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\frac{k}{3^{k-1}}$

ここで、$\sum_{k=2}^{4}{}_5C_k\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\frac{k}{3^{k-1}}=\left(\frac{1}{3}\right)^4\left\{{}_5C_2\frac{2}{3}+{}_5C_3\frac{3}{3^2}+{}_5C_4\frac{4}{3^3}\right\}=\frac{290}{2187}$

$\therefore$ 求める確率は、$\frac{85+290}{2187}=\frac{125}{729}$

（解説）

じゃんけんを題材にした確率問題であり、こういった身近な題材を使ったものは個人的に好きです。

(1)では、誰が勝つかでn通り、勝つ人が決まれば、その人は何でも出すことができ、それに対し、他の人の手も一意に決まります。

(2)では、あいこになるのは手が 1 種類 or3 種類なので、2 種類のときを考えました。

その際、単純に $3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ と考えると、その中には 1 種類のときもあるので引いてあげます。

(3)は、(1)(2)を利用します。1 回目で何人に絞られるかを考える必要がありますが、nが 5 なので、そのケースはそんなに多くないです。

名古屋大学(理・前)2013年第1問

3 人でジャンケンをする。各人はグー、チョキ、パーをそれぞれ$\dfrac{1}{3}$の確率で出すものとする。負けた人は脱落し、残った人で次回のジャンケンを行い(アイコのときは誰も脱落しない)、勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め、ジャンケンがn回目まで続いてn回目終了時に 2 人が残っている確率をp_n、3 人で残っている確率をq_nおく。

(1) p_1, q_1を求めよ。

(2) p_n, q_nがみたす漸化式を導き、p_n, q_nの一般項を求めよ。

(3) ちょうどn回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

名古屋大学(理・前)2013年第1問

（回答）

3 人で 1 回じゃんけんしたとき、1 人のみが勝つ確率は、$\dfrac{{}_3C_1\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$、あいこの確率は、$\dfrac{3+3!}{3^3}=\dfrac{1}{3}$、

2 人は勝つ確率は、$\dfrac{{}_3C_2\cdot 3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$。2 人で 1 回じゃんけんしたとき、1 人が勝つ確率は、$\dfrac{{}_2C_1\cdot 3}{3^2}=\dfrac{2}{3}$、

あいこの確率は、$\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{1}{3}$

(1) 上記より、$p_1=q_1=\dfrac{1}{3}$

(2) 上記より漸化式を立てると、$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}q_n$、$q_{n+1}=\dfrac{1}{3}q_n$

これより、$q_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ であり、$n=1$ のときも成立する。

$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}q_n=\dfrac{1}{3}p_n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ より、$3^{n+1}p_{n+1}=3^np_n+1$

数列$\{3^np_n\}$は、初項 1、公差 1 の等差数列なので、$3^np_n=1+(n-1)=n$ $\therefore p_n=\dfrac{n}{3^n}$

(3) 求める確率をr_nとすると、$n\geq 2$ に対して

$r_n=\dfrac{2}{3}p_{n-1}+\dfrac{1}{3}q_{n-1}=\dfrac{2(n-1)}{3^n}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n(2n-1)$

これは、$n=1$ のときも成立

（解説）

じゃんけんを題材に 1 人の勝ち残りを対象とした確率問題であり、こういった身近な題材を使ったものは個人的に好きです。設定も超頻出です。まずは 3 人でじゃんけんしたとき、2 人でじゃんけんしたときの説明を記載しました。(1)では、それを使うのみです。(2)ではどうなったら 3 人 → 3 人、3 人 → 2 人、2 人 → 2 人となるかを考えると、(2)の漸化式が立式出来ます。教科書レベルの漸化式が登場しますので、一般項も用意に求まります。(3)ではどうなったら 3 人 → 1 人、2 人 → 1 人になるかを考え、(2)の結果を使います。最後は、$n=1$ のときも成立することを一言添えましょう。($n-1$ 項目を使っているので$n\geq 2$)

東北大学(文・前)2004年第4問

A, B, C の 3 人でじゃんけんをする。一度じゃんけんで負けたものは、以降のじゃんけんから抜ける。残りが 1 人になるまでじゃんけんを繰り返し、最後に残ったものを勝者とする。ただし、あいこの場合も 1 回のじゃんけんをおこなったと数える。。

(1) 1 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(2) 2 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(3) 3 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(4) $n \geq 4$ とする。n回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

東北大学(文・前)2004年第4問

（回答）

3 人で 1 回じゃんけんしたとき、1 人のみが勝つ確率は、$\dfrac{{}_3C_1 \cdot 3}{3^3} = \dfrac{1}{3}$、あいこの確率は、$\dfrac{3+3!}{3^3} = \dfrac{1}{3}$、

2 人は勝つ確率は、$\dfrac{{}_3C_2 \cdot 3}{3^3} = \dfrac{1}{3}$。2 人で 1 回じゃんけんしたとき、1 人が勝つ確率は、$\dfrac{{}_2C_1 \cdot 3}{3^2} = \dfrac{2}{3}$、

あいこの確率は、$\dfrac{3}{3^2} = \dfrac{1}{3}$

(1) 上記より、$\dfrac{1}{3}$

(2) 題意の時は、1 回目で 2 人が勝ち、2 回目で 1 人が勝つ場合と、

1 回目であいこ、2 回目で 1 人が勝つ場合があるので、求める確率は、$\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

(3) 題意の時は、3 人 → 3 人 → 3 人 → 1 人となる場合と、3 人 → 3 人 → 2 人 → 1 人となる場合と、

3 人 → 2 人 → 2 人 → 1 人となる場合があるので、求める確率は、$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{27}$

(4) 3 人 → 3 人 → ⋯ → 3 人 → 1 人となる確率は、$\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

3 人 → 3 人 → ⋯ → 3 人 → 2 人 → ⋯ → 2 人 → 1 人となる確率は、k回 3 人でじゃんけんしたとし、
それらを足し合わせることにより、

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 2\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

以上より、求める確率は、$2(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{2n-1}{3^n}$

（解説）

じゃんけんを題材に 1 人の勝ち残りを対象とした確率問題であり、名古屋大学(理・前)2013 年第 1 問と同じ設定です。まずは 3 人でじゃんけんしたとき、2 人でじゃんけんしたときの確率を整理しておくと、各小問に取り組みやすいです。難易度としてはやや易しめですが、こういった問題になれておくと、神戸大(文・前)2009 年第 3 問や、東大(理・前)1992 年第 6 問といった問題でもある程度は点数を稼げると思います。