

大阪大学(理・前)2014年第5問

さいころを繰り返し投げ、 n 回目に出た目を X_n とする。 n 回目までに outcomes の積 $X_1 X_2 \cdots X_n$ を T_n で表す。 T_n を5で割った余りが1である確率を p_n とし、余りが2,3,4である確率を q_n とする。

(1) $p_n + q_n$ を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。

(3) $r_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n p_n$ とにおいて r_n を求めることにより、 p_n を n の式で表せ。

大阪大学(理・前)2014年第5問

(回答)

(1) T_n が5で割り切れないのは、5の目が1回もでない確率なので、 $p_n + q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

(2) T_{n+1} を5割った余りが1となるのは、 $(T_n \text{を割った余り}, X_{n+1}) = (1, 1), (1, 6), (2, 3), (3, 2), (4, 4)$ なので、

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - p_n\right\} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(3) (2)より、 $\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1} p_{n+1} = \frac{1}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n + \frac{1}{5}$

$$r_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n p_n \text{ とおくと、} r_{n+1} = \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5} \text{ となり、} r_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}\left(r_n - \frac{1}{4}\right)$$

$\left\{r_n - \frac{1}{4}\right\}$ は、初項 $r_1 - \frac{1}{4} = \frac{6}{5}p_1 - \frac{1}{4} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$ 、公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列なので

$$r_n = \frac{3}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4}$$

$$\therefore p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(解説)

サイコロの目の積を扱う問題です。積が割り切れる or 割った余りの2種類です。また、それに応じて何かの事象が発生するという組み合わせもあるでしょう。

(1) の $p_n + q_n$ は、 T_n が5で割り切れない確率なので、5の目が出ない確率です。

(2) は p_{n+1} と p_n の漸化式を作ります。メモ程度に表を作れば問題ないでしょう。

(3) は誘導がなくても正答すべき問題です。旧帝大&それ以外の医学部生では完答必須。

京都大学(理・前)1992年第4問

サイコロを繰り返し n 回振って、出た目の数を掛け合わせた積を X とする。

すなわち、 k 回目に出た目の数を Y_k とすると、 $X = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$

(1) X が3で割り切れる確率 p_n を求めよ。

(2) X が6で割り切れる確率 q_n を求めよ。

京都大学(理・前)1992年第4問

(回答)

(1) X が3で割り切れないのは、サイコロの目が1,2,4,5のみときであり、その確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$p_n = 1 - (X \text{ が } 3 \text{ で割り切れない確率}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(2) $1 - (X \text{ が } 2 \text{ でも } 3 \text{ でも割り切れない確率})$

$$= (X \text{ が } 2 \text{ で割り切れる確率}) + (X \text{ が } 3 \text{ で割り切れる確率}) - (X \text{ が } 6 \text{ で割り切れる確率})$$

X が2で割り切れない確率は、サイコロの目が1,3,5のみときであり、その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$(X \text{ が } 2 \text{ で割り切れる確率}) = 1 - (X \text{ が } 2 \text{ で割り切れない確率}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

X が2でも3でも割り切れない確率は、サイコロの目が1,5のみときであり、その確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\text{以上より、} 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_n - q_n \quad \therefore q_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n + p_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(解説)

サイコロの目の積を扱う問題であり、類題が数多くあります。

難関大受験生は、問題文をみただけで小躍りし、難なく完答すべき問題。

(1)も(2)も余事象の考え方を使います。(2)は1行目の式が全てです。

北海道大学(理・前)2013年第4問

次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする。

(i) X が 4 の倍数ならば、点 P は x 軸方向に -1 動く。

(ii) X が 4 で割った余りが 1 ならば、点 P は y 軸方向に -1 動く。

(iii) X が 4 で割った余りが 2 ならば、点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

(iv) X が 4 で割った余りが 3 ならば、点 P は y 軸方向に $+1$ 動く

たとえば、2 と 5 が出た場合には $2 \cdot 5 = 10$ を 4 で割った余りが 2 であるから、点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも、点 P は原点 $(0, 0)$ を出発点とする。

(1) 2 個のサイコロを 1 回投げて、点 P が $(-1, 0)$ にある確率を求めよ。

(2) 2 個のサイコロを 3 回投げて、点 P が $(2, 1)$ にある確率を求めよ。

(3) 2 個のサイコロを 4 回投げて、点 P が $(1, 1)$ にある確率を求めよ。

北海道大学(理・前)2013年第4問

(回答)

(1) X を 4 で割った余りが 3 となるのは、2 個のサイコロの目が、4 で割った余りが 1 と 4 で割った余りが 3

のときであるので、その確率は $2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$

X を 4 で割った余りが 1 となるので、その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$

X を 4 で割った余りが 2 となるのは、2 個のサイコロの目が 4 で割った余りが 2 と奇数のときであるので、

その確率は $2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

X が 4 で割り切れる確率は、 $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

(2) 題意のときは、(iii)の移動が 2 回、(iv)の移動が 1 回のときである。

求める確率は、 $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$

(3) (i), (ii), (iii), (iv)の移動回数をそれぞれ、 a_1, a_2, a_3, a_4 とすると、

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4, \quad -a_1 + a_3 = 1, \quad -a_2 + a_4 = 1$$

$$\therefore a_3 + a_4 = 3, a_1 + a_2 = 1$$

以上より、 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 2)$

求める確率は、 ${}_4C_2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{12} + {}_4C_2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{36} = \frac{50}{729}$

(解説)

(1)では、サイコロの目の性質から、(i)(ii)(iii)(iv)

の移動が起こる確率を求めましたが、高々36通りしかないので表に書き出してもいいです。

(3)は、少なくとも右と上の移動が1回ずつ以上ないとだめなので、

座標平面で右上上下、右上右左の組み合わせしかありません。順不同なので、上記のようになります。

東京大学(理・前)2003年第5問

さいころを n 回振り、第1回目から第 n 回目までに出的サイコロの目の数 n 個の積を X_n とする。

(1) X_n が5で割り切れる確率を求めよ。

(2) X_n が4で割り切れる確率を求めよ

(3) X_n が20で割り切れる確率を p_n とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n)$

注意：さいころは1から6までの目が等確率で出るものとする。

東京大学(理・前)2003年第5問

(回答)

(1) X_n が5で割り切れないのは、1から n 回目のサイコロの目が全て1,2,3,4,6のいずれのときであり、

その確率は、 $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ である。 $\therefore$ 求める確率は、 $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

(2) まず、 X_n が4で割り切れない確率を考える。

①偶数の目が1回も出ない、②2または6が1回のみ出る、の2通りであるので、

その確率は、 $\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore$ 求める確率は、 $1 - \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3) X_n が4でも5でも割り切れない確率を考える。

①1または3しか出ない、②2または6が1回出てそれ以外は1または3、の2通りであるので、

その確率は、 $\left(\frac{2}{6}\right)^n + n \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} = (1+n) \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$1 - (4 \text{ でも } 5 \text{ で割り切れない}) = (4 \text{ で割り切れる確率}) + (5 \text{ で割り切れる確率}) - p_n$

$1 - \left\{ (1+n) \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - p_n$

$\therefore 1 - p_n = -(1+n) \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(1 + \frac{2n}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left\{ -(1+n) \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(1 + \frac{2n}{3}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^n + 1 \right\}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\left(\frac{5}{6}\right)^n \left\{ -(1+n) \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(1 + \frac{2n}{3}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^n + 1 \right\} \right)$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log \frac{5}{6} + \frac{1}{n} \log \left\{ -(1+n) \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(1 + \frac{2n}{3}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^n + 1 \right\} \right\} = \log \frac{5}{6}$

(解説)

難関大受験生には、(1)(2)は解説不要でしょう。、おそらく東大受験生の多くが正解し差がつかないだろう。

(3)は差がついたと思われる。集合の図を書けば p_n は難なく求まるだろう。極限は予想して欲しい。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 - p_n) = -\infty$ であり定数に近づくことを予想したうえで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log A^n = \log A$ の形に持って行く

ことを考えましょう。 n 乗の中で $\frac{5}{6}$ が1番大きく、それでくくれば $\log$ の中を $(\frac{5}{6})^n \cdot (1 \text{ に近づくもの})$

という形に出来ます。この考え方は暗記してもいいくらい重要です。