京都大学 2017 年(理・前)第 6 問

nを自然数とする。n個の箱すべてに、$\boxed{1}$、$\boxed{2}$、$\boxed{3}$、$\boxed{4}$、$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている。各々の箱から 1 枚ずつカードをを取り出し、取り出した順に左から並べてn桁の数字Xを作る。このとき、Xが 3 で割り切れる確率を求めよ。

京都大学 2017 年(理・前)第 6 問

(回答)

Xの各位の数字を$a_n, a_{n-1}, \cdots a_1$とおくと、$X = 10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + \cdots + 10^0 a_1$と表されることから、

Xは 3 で割った余りは、$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$を 3 で割った余りに等しい。

ここで、$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$とおき、$S_n$を 3 で割った余りが、0,1,2 になる確率を、p_n, q_n, r_nとおく。

a_{n+1}の数字を考えると、$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}q_n + \frac{2}{5}r_n$

また、$p_n + q_n + r_n = 1$ であることから、

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}(1 - p_n) = -\frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5} \quad \therefore p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

これより、$p_n = \left(p_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n} + \frac{1}{3}$

上記が求める確率である。

(解説)

おそらく京都大学以外では、誘導つきで(Xを割った余りは各桁の数字を足したものを割った余りに等しいことを証明させるや、確率漸化式であることをにおわせる等)出題されるケースが多いと思われる。

$10 = 3 \cdot 3 + 1$ として 10 のべき乗を二項係数を使って展開すれば、冒頭の結論は導けます。

回答としては難しくないが、自力で考える能力を問われる問題である。

名古屋大学 2010 年（理・前）第 3 問

はじめに、A が赤玉を 1 個、B が白玉を 1 個、C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$の硬貨を投げ、表が出れば A と B の玉を交換し、裏が出れば B と C の玉を交換する、という操作を考える。この操作をn回$(n=1,2,3,\cdots)$繰り返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれa_n, b_n, c_nと置く。

(1) $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$を求めよ。

(2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$を$a_n, b_n, c_n$で表せ。

(3) a_n, b_n, c_nを求めよ。

名古屋大学 2010 年（理・前）第 3 問

（回答）

(1) 1 回目の操作後の A, B, C が持っている玉の色は、$(A,B,C)=(\text{赤},\text{青},\text{白}),(\text{白},\text{赤},\text{青})$であり、

2 回目の操作後の A, B, C が持っている玉の色は、$(A,B,C)=(\text{青},\text{赤},\text{白}),(\text{赤},\text{白},\text{青}),(\text{赤},\text{白},\text{青}),(\text{白},\text{青},\text{赤})$

以上より、$a_1=\dfrac{1}{2}, b_1=\dfrac{1}{2}, c_1=0, a_2=\dfrac{1}{2}, b_2=\dfrac{1}{4}, c_1=\dfrac{1}{4}$

(2) n回目の操作後、赤玉を A が持っている場合、確率$\dfrac{1}{2}$ずつで$(n+1)$回目の操作後、A か B が赤玉を持つ。

同様に、n回目の操作後、赤玉を B, C が持っている場合を考えると、以下の漸化式が求まる。

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n, b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n, c_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

(3) $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n=\dfrac{1}{2}(1-b_n)$なので、$b_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(b_n-\dfrac{1}{3}\right)\quad \therefore b_n=\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{1}{3}$

$a_{n+1}-c_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n-c_n)$なので、$a_n-c_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

また、$a_n+c_n=1-b_n=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

上記 2 つの式より、$a_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}, c_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

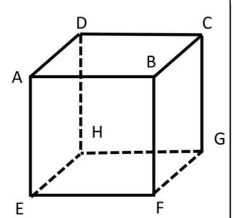
（解説）

問題文を読んだときに、確率漸化式の問題であり、A と C を状況が似ていて、B は違うということを感じて欲しい。
B は必ず玉を交換するという意味です。そうすれば(3)がスムーズに解けると思います。
当然ですが、$a_n+b_n+c_n=1$ です。

大阪大学 2010 年（理・前）第 5 問

nを 0 以上の整数とする。立方体 ABCD − EFGH の頂点を、以下のように移動する 2 つの動点 P, Q を考える。時刻 0 には P は頂点 A に位置し、Q は頂点 C に位置している。時刻nにおいて、P と Q が異なる頂点に位置していれば、時刻$n+1$には、P は時刻 n に位置していた頂点から、それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り、Q も時刻nに位置していた頂点から、それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る。一方、時刻nにおいて、P と Q が同じ頂点に位置していれば、時刻$n+1$には P も Q も時刻nの位置からは移動しない。

(1) 時刻 1 において、P と Q が異なる頂点に位置するとき、P と Q はどの頂点にあるか、可能な組み合わせをすべて挙げよ。



(2) 時刻nにおいて、P と Q が異なる頂点に位置する確率r_nを求めよ。

(3) 時刻nにおいて、P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか、またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率をp_nとする。また、時刻nにおいて、P と Q のいずれか一方が上面 ABCD、他方が下面 EFGH にある確率をq_nをする。p_{n+1}を、p_nとq_n を用いて表せ。

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$ を求めよ。

大阪大学 2010 年（理・前）第 5 問

（回答）

(1) 1 秒後に、P は B, D, E のいずれかにあり、Q は B, D, G のいずれかにある。

求める組み合わせは、$(P,Q)=(B,D)(B,G)(D,B)(D,G)(E,B)(E,D)(E,G)$

(2) (1)より 1 秒後に確率$\frac{2}{9}$で P と Q は同じ点に位置し、確率$\frac{7}{9}$で異なる点$\left(\text{距離は}\sqrt{2}\right)$に位置する。

2 秒後以降も同様に考えると、$r_n=\left(\frac{7}{9}\right)^n$

(3) n秒後に P と Q が、A と C にあったとすると、$n+1$ 秒後に P と Q は確率$\frac{3}{9}$で上下が同じであり、

確率$\frac{4}{9}$で上下が別である。また、n秒後に A と F にあったとすると$n+1$ 秒後に P と Q は

確率$\frac{2}{9}$で上下が同じであり、確率$\frac{5}{9}$で上下が別である。P と Q が上記以外の点にあった場合も同様なので、

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}q_n$$

(4) $p_n+q_n=r_n$ より、$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^n-p_n\right\}$

変形すると、$\frac{p_{n+1}}{\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}}-\frac{1}{3}=\frac{1}{7}\left\{\frac{p_n}{\left(\frac{7}{9}\right)^n}-\frac{1}{3}\right\}$　　$\therefore p_n=\left(\frac{7}{9}\right)^n\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}\left(\frac{p_1}{\frac{7}{9}}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\right\}=\frac{2}{21}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^n\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n$

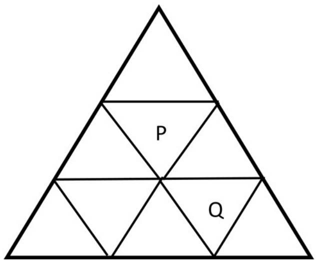
$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{p_n}\left(\frac{7}{9}\right)^n-1\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{21}\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\right)^{-1}-1\right\}=2$$

（解説）

問題文が長く、小問が多いということは、小問 1 つ 2 つは難しくないことが多いです。少なくとも部分点は取りましょう。(1)が以降にも生きてます。問題の設定が把握できたら、後は対称性を考慮しながら漸化式を立てて一般項を求めればいいでしょう。PQ の距離は 0 か$\sqrt{2}$というのに気づかないと対称性を見出せないので辛いです。

東京大学 2012 年（理・前）第 2 問

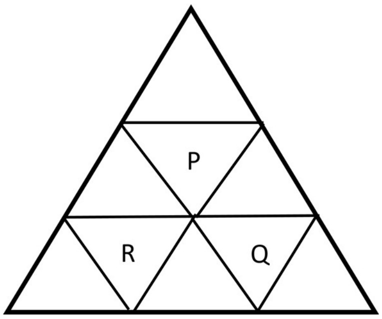
図のように、正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り、部屋 P, Q を定める。
1 つの球が部屋 P を出発し、1 秒ごとに、そのままその部屋にとどまることなく、
辺を共有する隣の部屋に同じ確率で移動する。球がn秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



東京大学 2012 年（理・前）第 2 問

（回答）

右図のように部屋 R をおく。



偶数秒後に P, Q, R のいずれかの部屋に球があり、奇数秒後はそれ以外の部屋にある。

n秒後に球が P, Q, R にある確率をそれぞれ、p_n, q_n, r_nとする。

kを自然数として、$p_{2k-1} = 0$

$2k$秒後から $2(k+1)$秒後の移動を考え、漸化式を作ると、

$$p_{2k+2} = \frac{2}{3}p_{2k} + \frac{1}{6}(q_{2k} + r_{2k})$$

$p_{2k} + q_{2k} + r_{2k} = 1$ であるので、

$$p_{2k+2} = \frac{2}{3}p_{2k} + \frac{1}{6}(1 - p_{2k}) = \frac{1}{2}p_{2k} + \frac{1}{6}$$

これを変形すると、$p_{2k+2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(p_{2k} - \frac{1}{3}\right)$ $\therefore p_{2k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(p_2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$ $(k > 1)$

対称性より$q_{2k} = r_{2k}$なので、$q_{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right\}$

これは$k = 1$ のときも成立する。

以上をまとめると求める確率は、$\begin{cases} \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} (n\text{が偶数}) \\ 0\ (n\text{が奇数}) \end{cases}$

（解説）

1 秒後、2 秒後と移動を考えれば、奇数秒後に Q に球があることはないのはわかりますね。
後は、漸化式を作り解くのみです。確率漸化式はよく京大で見られますが、この問題は京大でよくあるタイプより、
平易です。東大・京大受験者以外でも解けて欲しい問題です。