京都大学 2011 年（文・前）第 3 問

実数aが変化するとき、3 次関数$y = x^3 - 4x^2 + 6x$と直線$y = x + a$のグラフの交点の個数はどのように変化するか、aの値によって分類せよ。

京都大学 2011 年（文・前）第 3 問

（回答）

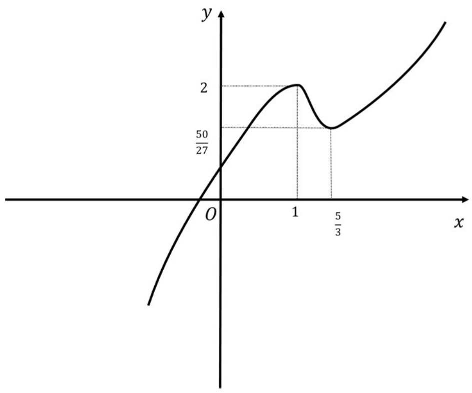
題意の交点の個数は、$x^3 - 4x^2 + 6x = x + a$の解の個数に等しい。

これを変形すると、$x^3 - 4x^2 + 5x = a$となる。左辺を$f(x)$とおく。

$y = f(x)$と$y = a$の共有点の個数を考えばよい。

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = (3x - 5)(x - 1)$

x		1		$\frac{5}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗



$$\begin{cases} a < \dfrac{50}{27}, 2 < a \text{のとき、1 個} \\ a = \dfrac{50}{27}, 2 \text{ のとき、2 個} \\ \dfrac{50}{27} < a < 2 \text{ のとき、3 個} \end{cases}$$

（解説）

片方の辺にすべての項を集めて解を探しても、本問は複雑ではないですが、定数項を分離しました。

分離すると議論が簡単になるケースが多くあります。非常に基礎的で、文系受験生と言えど完答したい問題。

東京大学 2013 年(理・前)第 2 問

aを実数とし、$x>0$ で定義された関数$f(x), g(x)$を次のように定める。

$$f(x)=\frac{cos\,x}{x},\qquad g(x)=sin\,x+ax$$

このとき$y=f(x)$のグラフと$y=g(x)$のグラフが$x>0$ において共有点をちょうど 3 つ持つようなaをすべて求めよ。

東京大学 2013 年(理・前)第 2 問

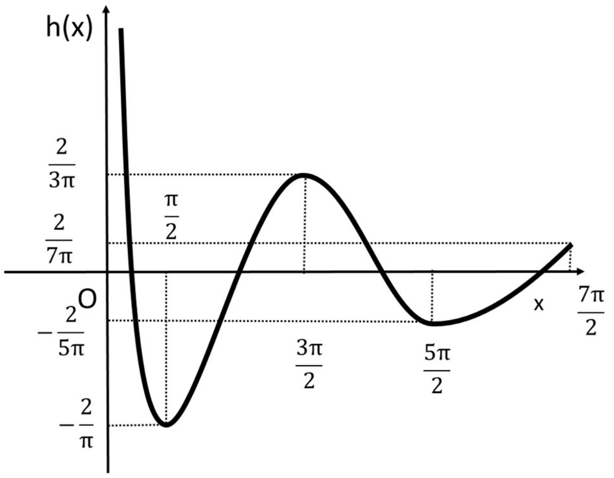
(回答)

(1) $y=f(x)$と$y=g(x)$の共有点のx座標は、$\dfrac{\cos x}{x}=\sin x+ax$の解である。

これを変形すると、$\dfrac{cos\,x}{x^2}-\dfrac{sin\,x}{x}=a$となる。左辺を $h(x)$とおく。

$$h'(x)=\frac{-x^2 sin\,x-2x\,cos\,x}{x^4}-\frac{x\,cos\,x-sin\,x}{x^2}=-\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}\right)cos\,x$$

x	(0)		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{2}$	
$h'(x)$		↘	0	↗	0	↘	0	↗	0	↘
$h(x)$	(∞)		$-\frac{2}{\pi}$		$\frac{2}{3\pi}$		$-\frac{2}{5\pi}$		$\frac{2}{7\pi}$	



$h(x)$は周期性を持ち、極大値・極小値はxの増加とともに絶対値が減少する。

以上より、共有点がちょうど 3 つあるのは、$\dfrac{2}{7\pi}<a<\dfrac{2}{3\pi}$, $a=-\dfrac{2}{5\pi}$

(解説)

片方の辺にすべての項を集めて解を探そうとすると複雑です。こういう場合、特に周期性を持つ場合は定数項を分離すると議論が簡単になります。振幅が小さくなっていくので、上記のような範囲が求まります。

この問題を完答できた場合、東大受験生でも理 3 を除いていい位置に食い込んでくるのではなかろうか。

大阪大学 2005 年（理・前）第 1 問

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$ とおく。直線$y = mx$と曲線$y = f(x)$が相違なる 3 点で交わるような実数mの範囲を求めよ。

大阪大学 2005 年（理・前）第 1 問

（回答）

直線$y = mx$と曲線$y = f(x)$は$x = 0$ で交わることはないので、$x \neq 0$ として$y = g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$と$y = m$が

相違なる 3 点で交わるmの範囲を求めればよい。

$$g(x) = 2x^2 + x - \frac{3}{x}$$

$$g'(x) = 4x + 1 + \frac{3}{x^2} = \frac{(x+1)(4x^2 - 3x + 3)}{x^2}$$

x		-1		(0)	
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$g(x)$	↘	4	↗		↗

増減表と$\displaystyle\lim_{x \to -0} g(x) = +\infty, \lim_{x \to +0} g(x) = -\infty, \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \infty$であることから、求める$m$の範囲は$m > 4$

（解説）

定数項を分離しましょう。そうすると$y = g(x)$は$x > 0$ の範囲で$y = m$と必ず共有点を持ち、かつ 1 点のみです。

$x < 0$ で$y = g(x)$と$y = m$が相異なる 2 つの共有点を持つ条件を求めればいいので、回答のようになります。