

信州大学(理・前)2013年第2問

(1) 放物線 $C: y = x^2 + x - 1$ と直線 $l: y = 2x + 1$ の交点の座標を求めよ。

(2) (1)で求めた交点の x 座標が大きい方を x_0 とする。 $a > x_0$ とする。 C と l で囲まれた領域の面積を S_1 、 C と l および直線 $x = a$ で囲まれた領域の面積を S_2 、 C と l および直線 $x = -a$ で囲まれた領域の面積を S_3 とする。 $S_1 = S_2 + S_3$ となるときの a の値を求めよ。

信州大学(理・前)2013年第2問

(回答)

(1) $x^2 + x - 1 = 2x + 1$ を解くと、 $x = -1, 2 \therefore$ 求める座標は、 $(-1, -1), (2, 5)$

$$(2) S_1 = \int_{-1}^2 \{2x + 1 - (x^2 + x - 1)\} dx = - \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx = \frac{9}{2}$$

$$S_2 = \int_2^a \{x^2 + x - 1 - (2x + 1)\} dx = \int_2^a (x^2 - x - 2) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^a$$

$$= \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} - 2a + \frac{10}{3}$$

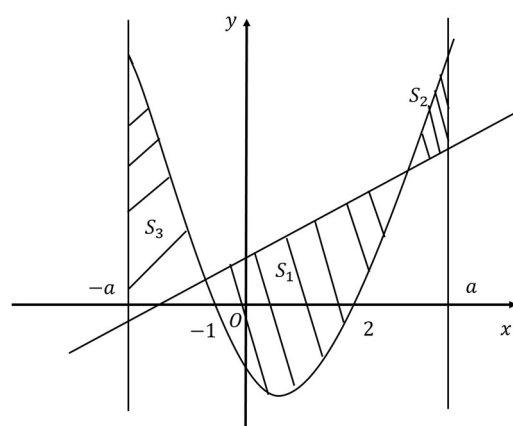
$$S_3 = \int_{-a}^{-1} \{x^2 + x - 1 - (2x + 1)\} dx = \int_{-a}^{-1} (x^2 - x - 2) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-a}^{-1}$$

$$= \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - 2a + \frac{7}{6}$$

$$S_1 = S_2 + S_3 \text{ より、} \frac{9}{2} = \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} - 2a + \frac{10}{3} + \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - 2a + \frac{7}{6} \therefore a = 0, \pm\sqrt{6}$$

$$a > x_0 = 2 \text{ より、} a = \sqrt{6}$$



(解説)

教科書レベルです。計算量も少なく文理問わず完答必須の問題。

京都大学(文・前)2017年第1問

曲線 $y = x^3 - 4x + 1$ と C とする。直線 l は C の接線であり、点 $P(3,0)$ を通るものとする。また、 l の傾きは負であるとする。このとき、 C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

京都大学(文・前)2017年第1問

(回答)

$y' = 3x^2 - 4$ であるので、 C 上の $(t, t^3 - 4t + 1)$ における接線は、 $y - (t^3 - 4t + 1) = (3t^2 - 4)(x - t)$

これが l であるためには、 $2t^3 - 9t^2 + 11 = 0 \quad \therefore (t + 1)(2t^2 - 11t + 11) = 0$

$t < 0$ より、 $t = 1$

l の方程式は、 $y = -x - 1$

l と C との共有点の x 座標は以下の解である。

$$-x - 1 = x^3 - 4x + 1$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) = 0$$

$$\therefore S = \int_{-2}^1 \{x^3 - 4x + 1 - (-x - 1)\} dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{27}{4}$$

(解説)

解説不要の教科書レベルの平易な問題です。3 次関数と接線に囲まれた部分の面積というよくある設定。
文系受験生でも完答は必須。

東京大学 2016 年(文・前)第 3 問

座標平面上の 2 つの放物線 $A: y = x^2$ 、 $B: y = -x^2 + px + q$ が点 $(-1, 1)$ で接している。ここで p と q は実数である。さらに、 t を正の実数とし、放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$ 、 y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1) p と q の値を求めよ。

(2) 放物線 A と C が囲む面積を $S(t)$ とする。ただし、 A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める。 $S(t)$ を求めよ。

(3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。

東京大学 2016 年(文・前)第 3 問

(回答)

(1) B が $(-1, 1)$ を通るので、 $-1 - p + q = 1$

A について $y' = 2x$ 、 B について $y' = -2x + p$ であり、 A と B は $(-1, 1)$ で共通接線を持つので、 $-2 = 2 + p$ 以上より、 $p = -4$ 、 $q = -2$

(2) C の方程式は、 $y = -(x - 2t)^2 + p(x - 2t) + q + t = -x^2 - 2(-2t + 2)x - 4t^2 + 9t - 2$

A と C の共有点の x 座標は以下の解である。

$$x^2 = -x^2 - 2(-2t + 2)x - 4t^2 + 9t - 2 \quad \therefore 2x^2 - 2(2t - 2) + 4t^2 - 9t + 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{\text{判別式}}{4} = (2t - 2)^2 - 2(4t^2 - 9t + 2) = -4t^2 + 10t = -2t(2t - 5)$$

$\frac{5}{2} \leq t$ のとき、 A と C は領域を囲まないので $S(t) = 0$

①の解は、 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると、 $\beta - \alpha = \sqrt{-2t(2t - 5)}$

$$\begin{aligned} 0 < t < \frac{5}{2} \text{ のとき、} S(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} \{2x^2 - 2(2t - 2) + 4t^2 - 9t + 2\} dx \\ &= 2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3}\{-2t(2t - 5)\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(3) (2) より $0 < t < \frac{5}{2}$ のときのみを考えればよい。

$$S(t) = \frac{1}{3}\{-2t(2t - 5)\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left\{-4\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{4}\right\}^{\frac{3}{2}} \text{ となるので、求める最大値は、} \frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{24}$$

(解説)

東大の問題は良問揃いであり文系の問題は、他大学の理系受験生にも解いて欲しい、ためになる問題である。

(1) は得点に差をつけたい & 波に乗らせたい意図でしょう。本題は (2) であり (3) はおまけという感じです。

一つ一つの要素は教科書的であり、計算量も大したことないので、計算ミスは致命的であり差がつきやすい。

神戸大学 2015 年(理・前)第 1 問

座標平面上の 2 つの曲線 $y = \frac{x-3}{x-4}$, $y = \frac{1}{4}(x-1)(x-3)$ をそれぞれ C_1, C_2 とする。

以下の問いに答えよ。

(1) 2 曲線 C_1, C_2 の交点をすべて求めよ。

(2) 2 曲線 C_1, C_2 の概形をかき、 C_1, C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

神戸大学 2015 年(理・前)第 1 問

(回答)

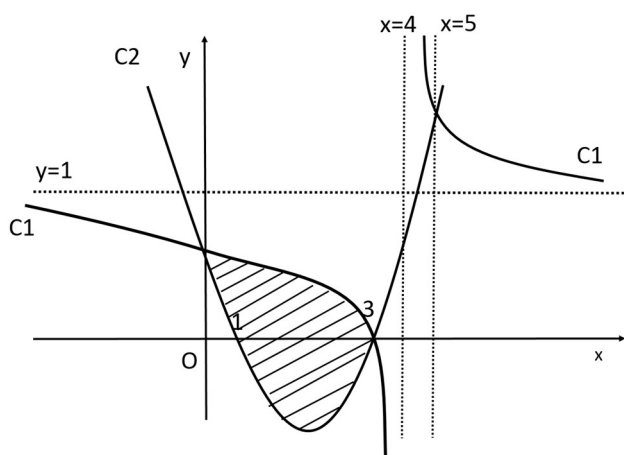
(1) C_1, C_2 の交点の x 座標は以下の解

$$\frac{x-3}{x-4} = \frac{1}{4}(x-1)(x-3) \text{ であり変形すると、} x(x-3)(x-5) = 0 \quad \therefore x = 0, 3, 5$$

交点は、 $\left(0, \frac{4}{3}\right) (3, 0) (5, 2)$

(2) グラフの概形は以下の通りであり、求める面積は下図の斜線部分の面積である。

$$\begin{aligned} \text{求める面積は、} \int_0^3 \left\{ \frac{x-3}{x-4} - \frac{1}{4}(x-1)(x-3) \right\} dx &= \int_0^3 \left\{ 1 + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) \right\} dx \\ &= \left[x - \log|x-4| - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x \right]_0^3 \\ &= 3 - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} + \log 4 \\ &= 3 - 2 \log 2 \end{aligned}$$



(解説)

基本ができていれば、特別なアイデアもない問題です。 C_1 は変形すれば概形が見えますね。3 点持つということで、図のようになることを想像しましょう。確実に完答したい問題です。