

東京大学1990年(文理・前)第3問

V を一辺の長さが1の正八面体、すなわち xyz 空間において $|x| + |y| + |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす点 (x, y, z) の集合と合同な立体とする。

(1) V の一つの面と平行な平面で V を切ったときの切り口の周の長さを一定であることを示せ。

(2) 一辺の長さが1の正方形の穴があいた平面がある。 V をこの平面にふれることなく穴を通過させることができるか。結論と理由を述べよ。

東京大学1990年(文理・前)第3問

(回答)

(1) V の頂点について右図のように置き、 A, B, C を含む平面と平行な平面での切り口を考える。この平面で AB, AC, CD, BE, DF, EF との交点を $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ と置く。

$Q_1Q_2 = t$ と置く。対称性から $0 \leq t \leq \frac{2}{3}$ の範囲で考えればよい。

Q_1Q_2 と BC は平行であり、 $AQ_2 = t, CQ_2 = 1 - t$

Q_2Q_3 と AD は平行であり、 $Q_2Q_3 = 1 - t$

CF と AE および Q_3Q_4 は平行なので、 $Q_3Q_4 = t$

対称性を考慮すると、切り口は右の2番目の図のようになり、
 周の長さ $= 3t + 3(1 - t) = 3$ となり、一定である。

(2) Q_1, Q_2, Q_5, Q_6 を周に含むような正方形 $P_1P_2P_3P_4$ を考える。

Q_1Q_2 と Q_5Q_6 の距離は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、この正方形の一辺の長さは、

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{t}{2} \cdot \tan \frac{\pi}{4} + \frac{1-t}{2} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$1 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4 - \sqrt{2} + \sqrt{6}} > 0 \text{ なので、 } \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} < 1$$

即ち、四角形 $Q_1Q_2Q_5Q_6$ は一辺の長さが $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ より大きな正方形を通過できる。

次に、 Q_3 と Q_4 がこの正方形の内側にあれば、正八面体は通過できる。

$$\cos \angle Q_2Q_3Q_4 = \frac{\frac{1}{2}(1-t)}{1-t} = \frac{1}{2}, \cos \angle Q_2Q_3Q_4 = \frac{\frac{1}{2}\{1 - (1-t)\}}{t} = \frac{1}{2}$$

これより、対称性を考慮すると、 Q_3 と Q_4 はこの正方形の内側にある。

以上より、一辺の長さが1の正方形を通過できる。

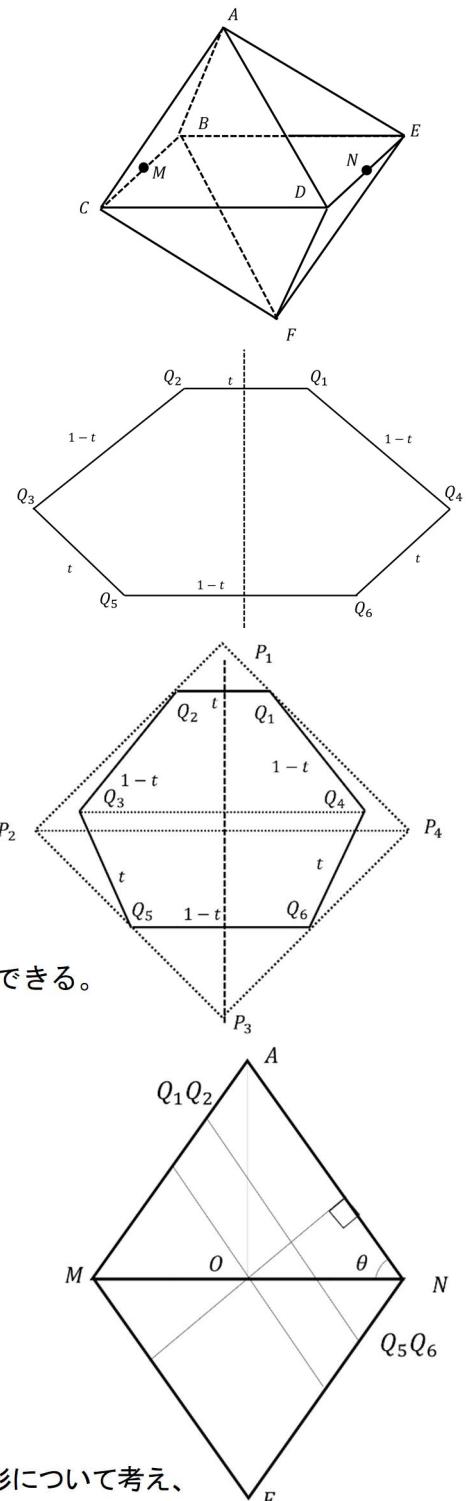
(解説)

正八面体がどういった立体かがわからなければ、厳しいだろう。

正八面体の1つの面に平行な平面での正八面体の切り口は六角形です。

後は、平行関係と正三角形の性質から(1)が言えます。(2)では最初に四角形について考え、

次に他の2点を考えます。結局、ミソは $\angle Q_2Q_3Q_4 = \angle Q_2Q_3Q_4 = \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{4}$ であることです。



東京大学2008年(理・前)第3問

- (1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図(平面図)を描け。
- (2) 正八面体の互いに平行な2つの面をとり、それぞれの面の重心を G_1, G_2 とする。 G_1, G_2 を通る直線を軸としてこの八面体を1回転してできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部を含むものとし、各辺の長さは1とする。

東京大学2008年(理・前)第3問

(回答)

(1) 全ての辺の長さが1である正八面体として考えてよい。

正八面体は、全ての辺の長さが1である2つの四角錐を底面同士で結合させた図形であり、右図のように頂点を置く。

また、 BC と DE の中点をそれぞれ M, N とする。

そうすると、 FM と AN は平行であり、 BC と DE は平行であるので、三角形 ADE を含む平面と三角形 FBC を含む平面は平行である。

以上より、題意の方向からこの立体を見ると、

6つの頂点は正六角形をなしているように見え、右図のようになる。

(2) 題意の正八面体について、 $A\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right),$

$D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), E\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), F\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ となるように座標空間を設定できる。

G_1, G_2 をそれぞれ三角形 ADE 、三角形 FBC の重心としても一般性失わない。

そうすると、 $G_1\left(0, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right), G_2\left(0, -\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$ となる。

線分 OG_1 上に $G_1P = t$ となるように P をとり、 P を通り G_1G_2 に垂直な平面と AB, AC, BE, CD, DF, EF の交点を

$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ とする。対称性から、 $0 \leq t \leq OG_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ として考える。

また、 P が $x = 0$ 平面上にあるので、 $PQ_1 = PQ_2, PQ_3 = PQ_4, PQ_5 = PQ_6$ である。

Q_1Q_4 は AD に平行なので $PQ_1 = PQ_4$ である。 CF と AE は平行であるので、 Q_4Q_5 は CF と平行であり、 $PQ_4 = PQ_5$

A, M, N を含む平面は右図のようになるので、題意の回転体の切り口の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi \left\{ (OP \cdot \sin \theta \tan \theta)^2 + \frac{1}{4} + (OP \cdot \sin \theta)^2 \right\}$$

ここで、 $OP = \frac{\sqrt{6}}{6} - t, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ なので、

$$S(t) = \pi \left\{ \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6}t \right)^2 + \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}t \right)^2 \right\} = \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{\sqrt{6}}{6}t + \frac{1}{3} \right) \pi$$

$$\text{求める体積} V \text{は、} V = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{6}} \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{\sqrt{6}}{6}t + \frac{1}{3} \right) dt = 2\pi \left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{\sqrt{6}}{12}t^2 + \frac{1}{3}t \right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{54}\pi$$

(解説)

正八面体がどういった立体かがわからなければ、手も足も出ない。わかっていても平行や垂直という基礎的性質を使い、繰り返し考察を行っていく必要があり、難易度が高い。正八面体に関する問題の経験があっても、時間的に苦しいかもしれないが、経験があれば部分点はなんとかかなるだろう。

