京都大学 2011 年（文・前）第 3 問

任意の整数nに対して、n^9-n^3は 9 で割り切れることを示せ。

京都大学 2011 年（文・前）第 3 問

（回答）

$n^9-n^3=n^3(n^6-1)=n^3(n^3+1)(n^3-1)=n^3(n+1)(n^2-n+1)(n-1)(n^2+n+1)$

$n=3k,3k-2,3k-1\left(k\text{は自然数}\right)$とおける。

$(i)n=3k$のとき

　n^3は 9 で割り切れるので、n^9-n^3は 9 で割り切れる。

$(ii)n=3k-2$ のとき

$n^9-n^3=(3k-2)^3\{(3k-2)^3+1\}(3k-3)\{((3k-2)^2+(3k-2)+1\}$

$\qquad\quad =3(3k-1)^3\left\{\left(3\text{ の倍数}\right)-7\right\}(k-1)\left\{\left(3\text{ の倍数}\right)+3\right\}$

$\qquad\quad =9(3k-1)^3\left\{\left(3\text{ の倍数}\right)-7\right\}(k-1)(\text{整数}+3)$

よって、n^9-n^3は 9 で割り切れる。

$(ii)n=3k-1$ のとき

$n^9-n^3=(3k-1)^3(3k)\{(3k-1)^2-(3k-1)+1\}(3k-2)\{(3k-1)^2+(3k-1)+1\}$

$\qquad\quad =(3k-1)^3(3k)\{9k^2-9k+3\}(3k-2)(9k^2-3k+1)$

$\qquad\quad =9(3k-1)^3k(3k^2-3k+1)(3k-2)(9k^2-3k+1)$

よって、n^9-n^3は 9 で割り切れる。

題意は満たされた。

（解説）

難しくない問題です。確実に正解したい。「割り切れる = 約数として持つ」として分解したくなります。
少なくともこの形は扱いにくいので因数分解しましょう。あとは、9 で割り切れることに注目すれば、3 で割った余りで場合分けしましょう。素数は強いのです。類題が、九州大学 2014 年（理・前）第 2 問(1)にあります。

京都大学 2014 年（理・前）第 5 問

自然数a,bはどちらも 3 で割り切れないが、a^3+b^3は 81 で割り切れる。このようなa,bの組(a,b)のうち、a^2+b^2を最小にするものと、そのときのa^2+b^2の値を求めよ。

京都大学 2014 年（理・前）第 5 問

（回答）

$(a,b)=(9k+i,9m+j)$ $\left(k,m\text{は整数、}i,j\text{は 1 から 8 までの整数}\right)$とおける。

a,bは 3 で割り切れないので、i,jとも 1,2,4,5,7,8 のいずれかである。

$a^3+b^3=\left(27\text{ の倍数}\right)+i^3+j^3=\left(27\text{ の倍数}\right)$

i^3,j^3を 9 で割った余りの和が 9 であるので、i,jを 3 で割った余りの和は 3 である。即ち、$a+b$は 3 の倍数

ここで、$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$

abが 3 の倍数でなく、$a+b$が 3 の倍数なので、$\{(a+b)^2-3ab\}$は 9 の倍数でない。$\therefore a+b$は 27 の倍数である。

これより、$i+j$は 9 の倍数である。　　∴ 対称性を考慮して$(i,j)=(1,8)(2,7)(4,5)$

また、ab平面で考えると、a^2+b^2が最小となるとき、$a+b=27$

$a+b=9(k+m+1)=27\ \therefore k+m=2$

$a^2+b^2=a^2+(27-a)^2=2\left(a-\dfrac{27}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\cdot 27^2$

(i) $(i,j)=(1,8)$のとき

$(a,b)=(10,17)$のとき、a^2+b^2の最小値は 370

(ii) $(i,j)=(2,7)$のとき

$(a,b)=(11,16)$のとき、a^2+b^2の最小値は 377

(iii) $(i,j)=(4,5)$のとき

$(a,b)=(13,14)$のとき、a^2+b^2の最小値は 365

対称性を考慮して、$(a,b)=(13,14),(14,14)$のときa^2+b^2は最小値をとり、その値は 365

（解説）

京大らしい問題かと思います。いきなり答案用紙に書き出すのではなく、色々試してから書きましょう。

81 というのが見えているので、9 で割った余りで表現しました。そこで余りを絞りました。

iを 3 で割った余りが 1 ならi^3 を割った余りも 1、iを 3 で割ったまりが 2 ならi^3 を割った余りの 2 です。そうすると、結果的に、$a+b$が 27 の倍数となります。で、a^2+b^2を最小とするためには、$a+b=27$ を使います。

後は、27/2 に近いaで求めていけばいいですが、京大受験生といえど、試験場で完答するのは難しいだろう。

東京大学 2016 年（文・前）第 4 問

以下の問いに答えよ。ただし、(1)については結論のみを書けばよい。

(1) nを正の整数とし、3^nを 10 で割った余りをa_nとする。a_nを求めよ。

(2) nを正の整数とし、3^nを 4 で割った余りをb_nとする。b_nを求めよ。

(3) 数列$\{x_n\}$を次のように定める。

$x_1 = 1,\quad x_{n+1} = 3^{x_n}(n = 1,2,3,\cdots)$

x_{10}を 10 で割った余りを求めよ。

東京大学 2016 年（文・前）第 4 問

（回答）

kを自然数とする。

(1)$3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27,\ 3^4 = 81$ である。

$n \geq 5$ のとき、$3^n = 3^4 \cdot 3^{n-4} = 81 \cdot 3^{n-4}$なので、

$n = 4k - 3$ のとき$a_n = 3$、$n = 4k - 2$ のとき$a_n = 9$、$n = 4k - 1$ のとき$a_n = 7$、

$n = 4k$のとき$a_n = 1$

(2) $n \geq 2$ に対して、$3^n = 9 \cdot 3^{n-2}$

3^{n-2}を 4 で割った商をp、余りをqとすると、$3^n = 9(4p + q) = 4(9p + 2q) + q$

即ち、$b_n = b_{n-2}(n \geq 3)$である。以上より、$n = 2k - 1$ のとき$b_n = 3$、$n = 2k$のとき$b_n = 1$

(3) $x_1, x_2, \cdots$ は奇数であるので、(2)よりx_9を 4 で割った余りは 3

(1)より、x_{10}を 10 で割った余りは 7 である。

（解説）

割った余りに関する整数問題であり、ポピュラーな問題です。(1)は回答のみでいいですが、簡単に書きました。

(3)は(1)(2)を用います。どこまで説明を書くか迷いますが、(2)より、(1)よりと順番に考えたと伝えましょう。

理系諸君は確実に完答したい。文系受験生でも難関大を目指す人には完答してほしい問題です。

東京大学 2014 年（理・前）第 5 問

rを 0 以上の整数とし、数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$a_1=r,\ \ a_2=r+1,\ \ \ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)(n=1,2,3,\cdots)$

また、素数pを 1 つとり、a_nをpで割った余りをb_nとする。ただし、0 をpで割った余りは 0 とする。

(1) 自然数nに対し、b_{n+2}は$b_{n+1}(b_n+1)$をpで割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2, p=17$ の場合に、10 以下のすべての自然数nに対して、b_nを求めよ。

(3) ある 2 つの相違なる自然数n, mに対して、$b_{n+1}=b_{m+1}>0, b_{n+2}=b_{m+2}$が成り立ったとする。

このとき、$b_n=b_m$が成り立つことを示せ。

(4) $a_2, a_3, a_4, \cdots$ にpで割り切れる数が現れないとする。このとき、a_1もpで割り切れないことを示せ。

東京大学 2014 年（理・前）第 5 問

（回答）

(1) a_nをpで割った商をl_nとすると、

$p\cdot l_{n+2}+b_{n+2}=(p\cdot l_{n+1}+b_{n+1})(p\cdot l_n+b_n+1)=p(pl_nl_{n+1}+l_nb_{n+1}+b_n+1)+b_{n+1}(b_n+1)$

両辺をpで割った余りを比較することにより、b_{n+2}をpで割った余りは、$b_{n+1}(b_n+1)$をpで割った余りに等しい。

∴ 題意は示された。

(2) $a_1=2$ より$b_1=2$、$a_2=3$ より$b_2=3$

(1)を利用して、$b_1b_2=6$ より$b_3=6$、$b_2b_3=18$ より$b_4=1$、$b_3b_4=6$ より$b_5=6$、$b_4b_5=6$ より$b_6=6$、

$b_5b_6=36$ より$b_7=2$、$b_6b_7=12$ より$b_8=12$、$b_7b_8=24$ より$b_9=7$、$b_8b_9=84$ より$b_{10}=16$

(3) $b_{n+2}=b_{m+2}$なので、(1)より$b_{n+1}(b_n+1)-b_{m+1}(b_m+1)=p$の倍数

$b_{n+1}(b_n+1)-b_{m+1}(b_m+1)=b_{n+1}(b_n-b_m)=0(\because b_{n+1}=b_{m+1})$

$b_{n+1}>0$ より$b_n=b_m$　∴ 題意は満たされた。

(4) $a_2, a_3, a_4, \cdots$ にpで割り切れる数が現れないとすると、$1\leq b_n\leq p-1(n=2,3,4,\cdots)$

(b_n, b_{n+1})は高々$(p-1)^2$通りしかないことから、$(b_{n+1}, b_{n+2})=(b_{m+1}, b_{m+2})(n<m)$となる$n$、$m$が存在

(3)よりこのとき、$b_n=b_m$である。

これを繰り返すことにより、$b_1=b_{m-n+1}>0$ となり、a_1もpで割り切れない。

（解説）

割った余りを扱い問題です。(1)は素直に上記のとおりにおけば示せます。(2)は(1)を利用して順に求めていくだけなので、考えることはないでしょう。(3)も(1)を利用すれば問題ないでしょう。(4)では、(b_n, b_{n+1})の組み合わせは有限個しかないので、$(b_{n+1}, b_{n+2})=(b_{m+1}, b_{m+2})(n<m)$となる$n$、$m$が存在することに気付けるかどうかです。当然、(3)が誘導であると推測して、行きましょう。東大受験生には、(3)までは解けてほしいところ。