京都大学 2011 年（文・前）第 3 問

任意の整数nに対して、$n^9 - n^3$は 9 で割り切れることを示せ。

京都大学 2014 年（理・前）第 5 問

自然数a, bはどちらも 3 で割り切れないが、$a^3 + b^3$は 81 で割り切れる。このようなa, bの組(a, b)のうち、$a^2 + b^2$を最小にするものと、そのときの$a^2 + b^2$の値を求めよ。

東京大学 2016 年（文・前）第 4 問

以下の問いに答えよ。ただし、(1)については結論のみを書けばよい。

(1) nを正の整数とし、3^nを 10 で割った余りをa_nとする。a_nを求めよ。

(2) nを正の整数とし、3^nを 4 で割った余りをb_nとする。b_nを求めよ。

(3) 数列$\{x_n\}$を次のように定める。

$x_1 = 1,\quad x_{n+1} = 3^{x_n} (n = 1,2,3,\cdots)$

x_{10}を 10 で割った余りを求めよ。

東京大学 2014 年（理・前）第 5 問

rを 0 以上の整数とし、数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$a_1 = r,\quad a_2 = r + 1,\quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) (n = 1,2,3,\cdots)$

また、素数pを 1 つとり、a_nをpで割った余りをb_nとする。ただし、0 をpで割った余りは 0 とする。

(1) 自然数nに対し、b_{n+2}は$b_{n+1}(b_n + 1)$をpで割った余りと一致することを示せ。

(2) $r = 2, p = 17$ の場合に、10 以下のすべての自然数nに対して、b_nを求めよ。

(3) ある 2 つの相違なる自然数n, mに対して、$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, b_{n+2} = b_{m+2}$が成り立ったとする。

このとき、$b_n = b_m$が成り立つことを示せ。

(4) $a_2, a_3, a_4, \cdots$にpで割り切れる数が現れないとする。このとき、a_1もpで割り切れないことを示せ。