

一橋大学 2017 年(前)第 2 問

連立方程式

$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 \\ y^2 = zx + 7 \\ z^2 = xy + 7 \end{cases}$$

を満たす、整数の組 (x, y, z) で $x \leq y \leq z$ となるものを求めよ。

一橋大学 2017 年(前)第 2 問

(回答)

$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 \cdots ① \\ y^2 = zx + 7 \cdots ② \\ z^2 = xy + 7 \cdots ③ \end{cases}$$

$x \geq 0$ とすると、 $0 \leq x \leq y \leq z$ であるので、 $x^2 = yz + 7 \geq xz + 7 \quad \therefore x(x - z) \geq 7$

しかし、 $x(x - z) \leq 0$ であることから、不適である。 $\therefore x < 0$

$z \leq 0$ とすると、 $x \leq y \leq z \leq 0$ であるので、 $z = xy + 7 \geq zy + 7 \quad \therefore z(z - y) \geq 7$

しかし、 $z(z - y) \leq 0$ であることから、不適である。 $\therefore z > 0$

$xz < 0$ なので、 $y^2 = zx + 7 \leq 7 \quad \therefore y = \pm 1, \pm 2$

① - ② より、 $(x - y)(x + y + z) = 0$

(i) $y = 1$ のとき

$$(x - y)(x + 1 + z) = 0$$

$x = y = 1$ のとき、② より $z^2 = 8$ となり不適なので、 $x + 1 + z = 0$

① より、 $x^2 = z + 7 = -(x + 1) + 7 \quad \therefore (x + 3)(x - 2) = 0$

$x \leq y$ より、 $x = -3, z = 2$

(ii) $y = -1$ のとき

$$(x - y)(x - 1 + z) = 0$$

$x = y = -1$ のとき、② より $z^2 = 6$ となり不適なので、 $x - 1 + z = 0$

① より、 $x^2 = -z + 7 = (x - 1) + 7 \quad \therefore (x - 3)(x + 2) = 0$

$x \leq y$ より、 $x = -2, z = 3$

(ii) $y = \pm 2$ のとき

② より $xz = -3$ となり、 $(x, z) = (-1, 3), (-3, 1), (1, -3), (3, -1)$ となるが、いずれも③ と $x \leq y \leq z$ より不適

求める解は、 $(x, y, z) = (-3, 1, 2), (-2, -1, 3)$

(解説)

方程式型の整数問題です。 x, y, z の大小関係が与えられていますが、正負は与えられていないので、しばらくしぼりましょう。しぼってしまえば、高々 y は 4 通りなので、後は淡々と条件を満たすものを探すだけです。とはいえ“後は淡々と”が長いですが。

大阪大学 2010 年(理・前)第 3 問

l, m, n を 3 以上の整数とする。等式 $\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)l = 2$ を満たす l, m, n の組をすべて求めよ。

大阪大学 2010 年(理・前)第 3 問

(回答)

与式を変形すると、 $(m-2)nl = 2(l-2)m < 2ml$

また、 $n \geq 3$ より、 $(m-2)nl \geq (3m-6)l$

上記より、 $m < 6$

(i) $m = 3$ のとき

$l(6-n) = 12$ となり、 $(l, n) = (4, 3)(6, 4)(12, 5)$

(ii) $m = 4$ のとき

$l(8-2n) = 16$ となり、 $(l, n) = (8, 3)$

(iii) $m = 5$ のとき

$l(10-3n) = 20$ となり、 $(l, n) = (20, 3)$

$\therefore (l, m, n) = (4, 3, 3)(6, 3, 4)(12, 3, 5)(8, 4, 3)(20, 5, 3)$

(解説)

3 以上というのを使って、範囲を絞りましょう。どう変形すれば範囲を絞れるかは与式をいじってみれば見えてきます。慣れが必要です。絞れた人は、計算ミスをしない限り完答、絞れなければゼロ点と差がつきやすい問題です。

東京工業大学 2018 年(理・前)第 2 問

次の問に答えよ。

(1) $35x + 91y + 65z = 3$ を満たす整数の組 (x, y, z) を一組求めよ。

(2) $35x + 91y + 65z = 3$ を満たす整数の組 (x, y, z) の中で $x^2 + y^2$ の値が最小となるもの、およびその最小値を求めよ。

東京工業大学 2018 年(理・前)第 2 問

(回答)

(1) l, m, n を整数とする。

与式を変形すると、 $7 \cdot 5x + 13 \cdot 7y + 13 \cdot 5z = 3$

両辺を 13 で割った余りに着目すると、 $35x$ を 13 で割った余りは 3 である。

$x = 13l + m$ (l, m は整数、 $0 \leq m \leq 12$) とすると、 $35x = (2 \cdot 13 + 9) \cdot (13l + m) = 13$ の倍数 $+ 9m$

これより、 $m = 9$ であり、 $x = 13l + 9$ とおける。

同様に 5 と 7 で割った余りに着目すると、 $y = 5m + 3$ 、 $z = 7n + 5$ とおける。

$(x, y) = (9, 3)$ をおくと、 $z = -9$ となり、 $(x, y, z) = (9, 3, -9)$ は与式を満たす。

(2) (1) より、与式を満たし、 x^2 を最小とする x は -4 であり、 y^2 を最小とする y は -2 である。

$\therefore x^2 + y^2$ は最小値 20 をとる。

(解説)

割った余り系の整数問題の典型です。(2) はおまけのようなもので、(1) で決まります。

おそらく全く手のつかない受験生と完答した受験生に綺麗に分かれたのではないかと思います。

素数は強いということで、係数を素因数分解しましょう。あとは割った余りに着目していけば、

上記のような形が導かれます。一組求めればいいので、無数にある解から一組書けばいいです。

(2) は、 z を適当に動かせば、 x と y は独立に動けるので、それぞれ x^2, y^2 が最小となる条件を求めればいいのです。

東京大学(理・前)2006年第4問

次の条件を満たす組 (x, y, z) を考える。をすべて求めよ。

条件(A) : x, y, z は正の整数で、 $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ および $x \leq y \leq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす組 (x, y, z) で、 $y \leq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組 (a, b, c) が条件(A)を満たすとする。このとき、組 (b, c, z) が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組 (x, y, z) は、無数に存在することを示せ。

東京大学(理・前)2006年第4問

(回答)

(1) $y \leq 3$ より、 $(x, y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)$

$(x, y) = (1, 1)$ のとき、 $2 + z^2 = z$ となり、 z が虚数となるので不適

$(x, y) = (1, 2)$ のとき、 $5 + z^2 = 2z$ となり、 z が虚数となるので不適

$(x, y) = (1, 3)$ のとき、 $10 + z^2 = 3z$ となり、 z が虚数となるので不適

$(x, y) = (2, 2)$ のとき、 $8 + z^2 = 4z$ となり、 z が虚数となるので不適

$(x, y) = (2, 3)$ のとき、 $13 + z^2 = 6z$ となり、 z が虚数となるので不適

$(x, y) = (3, 3)$ のとき、 $18 + z^2 = 9z$ となり、 $(z - 3)(z - 6) = 0 \therefore z = 3, 6$

以上より、 $(x, y, z) = (3, 3, 3), (3, 3, 6)$

(2) 組 (a, b, c) が条件(A)を満たし、組 (b, c, z) が条件(A)を満たすと仮定する。

$$a^2 + b^2 + c^2 = abc, \quad b^2 + c^2 + z^2 = bcz$$

辺々を引いて、 $(a + z)(a - z) = bc(a - z)$

$a \neq z$ より、 $z = bc - a \geq c(b - 1) \geq 2c$ ($\because$ (1)より、 $b \geq 3$)

(a, b, c) が条件(A)を満たすとき、 $z = bc - a$ として (b, c, z) が条件(A)を満たすことから、題意は示された。

(3) (1)より条件(A)を満たす組 (x_1, y_1, z_1) が存在し、(2)より条件(A)を満たす組 (x_2, y_2, z_2) が存在する。

(2)の操作を繰り返すことにより、条件を満たす組 $(x_n, y_n, z_n)(n = 1, 2, 3, \dots)$ が存在する。

また、(2)より組 $(x_n, y_n, z_n)(n = 1, 2, 3, \dots)$ は、すべて相異なるので条件を満たす組は無数に存在する。

(解説)

等式型の整数問題で等式を満たす自然数の組が無数にあることを示すものです。(1)は $y \leq 3$ より、検討すべき組 (x, y) は高々6組なので、1つ1つ確認すればいいです。色々考えるより、実は1番早いです。

(2)は厳密に言えば、条件(A)を満たす組について $a = b = c$ であれば、 $z = a$ でもいいわけですが、あくまで特殊な場合として除外しました。一言 $a = b = c$ ではないと、あつたら親切だったかと思います。

(3)では、(1)より条件(A)を満たす組が存在、(2)より「別の」組が存在、(2)を繰り返すことにより無数に存在、ということを説明すれば十分で、上記のような説明で十分でしょう。