

京都大学(理・前)2006年第4問

2以上の自然数 n に対し、 n と $n^2 + 2$ がともに素数になるのは $n = 3$ の場合に限ることを示せ。

京都大学(理・前)2006年第4問

(回答)

自然数 n は $n = 3k - i$ ($i = 0, 1, 2, k$ は自然数)と表せる。

(i) $n = 3k - 1$ のとき

$$n^2 + 2 = 9k^2 - 6k + 3 = 3(3k^2 - 2k + 1) = 3 \left\{ 3 \left(k - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} \right\} \text{より、}$$

$n^2 + 2$ は6以上かつ3の倍数となるので、 n と $n^2 + 2$ がともに素数となることはない。

(ii) $n = 3k - 2$ のとき

$$n^2 + 2 = 9k^2 - 12k + 6 = 3(3k^2 - 4k + 2) = 3 \left\{ 3 \left(k - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} \right\}$$

$k = 1$ のとき、 $n = 1$ となるので、 $k \geq 2$

$n^2 + 2$ は18以上かつ3の倍数となるので、 n と $n^2 + 2$ がともに素数となることはない。

(ii) $n = 3k$ のとき

k が2以上のとき、 n は素数でなくなるので、 $k = 1$

このとき、 $n^2 + 2 = 11$ で素数となり題意を満たす。

$\therefore n$ と $n^2 + 2$ がともに素数になるのは、 $n = 3$ のときのみである。

(解説)

n を3で割った余りで場合分けすればOKです。それに気づけるかどうかです。

割った余り場合分けすればうまくいく問題は多く、2で割った余りでは $n = 2$ が不適としか言えません。

$n = 3$ で割った余りでうまく行きました。3で割った余りの場合分けでうまくわけで、

難関大受験生は完答したいところ。

一橋大学 2014 年(前)第 1 問

$a - b - 8$ と $b - c - 8$ が素数となるような素数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

一橋大学 2014 年(前)第 1 問

(回答)

$$a - b - 8 \leq a - 2 - 8 = a - 10 \text{ なので } a \geq 10$$

$$b - c - 8 \leq b - 2 - 8 = b - 10 \text{ なので } b \geq 10$$

$a = 2n + 1 \geq 11, b = 2m + 1 \geq 11$ (m, n は自然数) をおける。また、 c は 2 か奇数である。

(i) $c = 2$ のとき

$$a - b - 8 = 2(n - m - 4) \text{ が素数となるのは、} n - m = 5 \text{ のときのみで、} a - b = 10$$

b を 3 で割って 2 余るとき、 a は 3 で割り切れるため、 b を 3 で割った余りは 1

$$b = 3k + 1 \text{ (} k \text{ は自然数) とおける。}$$

$$b - c - 8 = 3k - 9 \text{ が素数であり、3 で割り切れるので、} k = 4 \quad \therefore b = 13, a = 23$$

(i) $c = 2l + 1$ (l は自然数) のとき

$$b - c - 8 = 2(m - l - 4) \text{ が素数であるのは、} m - l = 5 \text{ のときのみで、} b - c = 10$$

$$a - b - 8 = 2(n - m - 4) \text{ が素数であるのは、} n - m = 5 \text{ のときのみで、} a - b = 10$$

c を 3 で割って 1 余るときは、 b は 3 で割って 2 余り、 a は 3 で割り切れる。

c を 3 で割って 2 余るときは、 b は 3 で割り切れる。 $\therefore c$ は 3 の倍数であり、 $c = 3, b = 13, a = 23$

求める解は、 $(a, b, c) = (2, 13, 23), (3, 13, 23)$

(解説)

取っ掛かりは難しいかもしれませんが、素数であるということは、2 か 3 以上の奇数です。

また、 $a = b + c$ のとき、 a, b, c を d で割った余りを e, f, g と置くと、自然数 m, n, l を用いて、

$$md + e = nd + f + ld + g = (n + l)d + f + g$$

a を d で割った余りは、 b, c を d で割った余りの和を d で割った余りに等しくなります。この 2 点が鍵です。覚えておきましょう。このように当たり前のことを当たり前に使うのが整数問題です。パターンはそんなに多くありませんので、数をこなせば得意分野(=得点源)に出来るはずです。

京都大学 2018 年(理・前)第 2 問

$n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

京都大学 2018 年(理・前)第 2 問

(回答)

k を整数とする。

(i) $n = 3k$ のとき

$$n^3 - 7n + 9 = 27k^3 - 21k + 9 = 3(9k^3 - 7k + 3)$$

これが素数となるので、 $9k^3 - 7k + 3 = 1 \therefore (k+1)(3k-1)(3k-2) = 0$

k は整数なので $k = -1$ であり、 $n = -3$

(ii) $n = 3k + 1$ のとき

$$n^3 - 7n + 9 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 - 7(3k + 1) + 9 = 27k^3 + 27k^2 - 12k + 3 = 3(9k^3 + 9k^2 - 4k + 1)$$

これが素数なので、 $9k^3 + 9k^2 - 4k + 1 = 1 \therefore k(9k^2 + 9k - 4) = 0$

$9k^2 + 9k - 4 = 0$ の解は無理数なので、 $k = 0$ であり、 $n = 1$

(iii) $n = 3k - 1$ のとき

$$n^3 - 7n + 9 = 27k^3 - 27k^2 + 9k - 1 - 7(3k - 1) + 9 = 27k^3 - 27k^2 - 12k + 15 = 3(9k^3 - 9k^2 - 4k + 5)$$

これが素数なので、 $9k^3 - 9k^2 - 4k + 5 = 1 \therefore (k-1)(3k+2)(3k-2) = 0$

k は整数なので $k = 1$ であり、 $n = 2$

求める n は $-3, 1, 2$

(解説)

京大の整数問題は難度が高いものが多いですが、これは非常に平易です。京大受験生は完答が必須だろう。

整数問題はいくつも解法があるが、9 が出てきているので、3 で割った余りで場合分けした。

他にもスマートな解法はあるが、試験場での時間等を考えれば、これが一番すんなりでなかろうか。

大阪大学 2013 年(理・前)第 3 問

4 個の整数、 $n + 1, n^3 + 3, n^5 + 5, n^7 + 7$ がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。
これを証明せよ。

大阪大学 2013 年(理・前)第 3 問

(回答)

(i) n が奇数のとき

与えられた 4 数は相異なる偶数となり、素数でない数が少なくとも 1 つ存在

(ii) n が偶数のとき

自然数 m を用いて、 $n = 2(3m - 2), 2(3m - 1), 2 \cdot 3m$ をおける。

(a) $n = 2(3m - 2)$ のとき

$n + 1 = 3(2m - 1)$ となることから、 $n + 1$ は素数でない。

(b) $n = 2(3m - 1)$ のとき

$n^3 + 3 = (6m - 1)^3 + 3 = 2(108m^3 - 18m + 3m + 2)$ より

$n^3 + 3$ は、偶数かつ 2 以上なので素数でない。

(c) $n = 2 \cdot 3m$ のとき

$n^3 + 3 = 3(72m^3 + 1)$ となることから、 $n^3 + 3$ は素数でない。

∴ 題意は示された。

(解説)

まずは、偶数か奇数かで分ける。2 の次に小さな素数 3 で割った余りで分けてみるという手順です。場合分けしたとき、その全ての場合で、少なくとも 1 つ素数でなくなるものが登場することを言えれば OK です。偶数は 2 と整数の積なので、要は 6 で割った余りが 0 か 2 か 4 かということですね。