

京都大学 2013 年(文・前)第 3 問

n と k を自然数とし、整式 x^n を整式 $(x - k)(x - k - 1)$ で割った余りを $ax + b$ とする。

(1) a と b はともに整数であることを示せ。

(2) a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

京都大学 2013 年(文・前)第 3 問

(回答)

(1) x^n を $(x - k)(x - k - 1)$ で割った商を $f(x)$ とおくと、 $x^n = (x - k)(x - k - 1)f(x) + ax + b$ となる。

これに、 $x = k, k + 1$ を代入すると、 $k^n = ak + b$, $(k + 1)^n = a(k + 1) + b$

これより、 $a = (k + 1)^n - k^n$, $b = k^n - ak = k^n - k\{(k + 1)^n - k^n\} = k(k + 1)\{k^{n-1} + (k + 1)^{n-1}\}$

n, k が自然数より、 a, b は明らかに整数である。

(2) a と b が素数 p を約数として持つと仮定すると、 $k, (k + 1), \{k^{n-1} + (k + 1)^{n-1}\}$ のいずれかが p で割り切れる。

(i) k が p で割り切れるとき、 $k = pl$ (l は自然数) とおける。

このとき、 $a = (pl + 1)^n + (pl)^n = \sum_{m=0}^{n-1} {}_nC_m (pl)^m$ となり、 a は p で割り切れない。

以下では、 k は p で割り切れないとして考える。

(ii) $(k + 1)$ が p で割り切れるとき、 $k + 1 = pl$ とおける。

$a = (pl)^n - (pl - 1)^n = \sum_{m=0}^{n-1} {}_nC_m (pl)^m (-1)^{n-m}$ となり、 a は p で割り切れない。

(iii) $\{k^{n-1} + (k + 1)^{n-1}\}$ が p で割り切れるとき、 $\{k^{n-1} + (k + 1)^{n-1}\} = pl$ とおける。

$a = pl(k + 1) + k^{n-1}(k + 1) - k^n = pl(k + 1) + k^{n-1}$

k が p で割り切れないことから、 a は p で割り切れない。

以上より、 a, b を割り切る共通の素数の約数は存在しない。

(解説)

(1) は上記のようにおいて、 $k, k + 1$ を代入して、 a, b を求めればよいでしょう。

(2) は存在すると仮定するとすべての場合で矛盾が生じるので、存在しないというストーリーで行けば問題ないでしょう。(2) は完全に整数問題であり、得意不得意が分かれる問題。

東京大学 2002 年(理・前)第 2 問

n は正の整数とする。 x^{n+1} を $x^2 - x - 1$ で割った余りを $a_nx + b_n$ とおく。

(1) 数列 $a_n, b_n, n = 1, 2, 3, \dots$ は、 $a_{n+1} = a_n + b_n, b_{n+1} = a_n$ を満たすことを示せ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 a_n, b_n は共に正の整数で、互いに素であることを証明せよ。

東京大学 2002 年(理・前)第 2 問

(回答)

(1) x^{n+1} を $(x^2 - x - 1)$ で割った商を $P_n(x)$ とおくと、 $x^{n+1} = (x^2 - x - 1)P_n(x) + a_nx + b_n$

また、 $x^{n+2} = x(x^2 - x - 1)P_n(x) + a_nx^2 + b_nx$

$$= (xP_n(x) + a_n)(x^2 - x - 1) + (a_n + b_n)x + a_n = (x^2 - x - 1)P_{n+1}(x) + a_{n+1}x + b_{n+1}$$

これより、 $a_{n+1} = a_n + b_n, b_{n+1} = a_n$

(2) 「 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 a_n, b_n は共に正の整数である」…①ことを数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1$ のとき、 $x^2 = (x^2 - x - 1) + x + 1$ より、 $a_1 = b_1 = 1$ であり、ともに正の整数である。

(ii) $n = k$ のとき、 a_k と b_k がともに正の整数であると仮定すると、

$n = k + 1$ のとき、(1)より、 a_{k+1} と b_{k+1} も正の整数である。

(i)(ii)より、①は成立。

次に、 $k \geq 2$ において a_k と b_k が互いに素でない k が存在すると仮定すると、

$a_k = dm, b_k = dl$ (m, l は自然数、 d は 2 以上の整数)とおけ、

$a_{k-1} = b_k = dl, b_{k-1} = a_k - a_{k-1} = dm - dl = d(m - l)$ となり、 a_{k-1} と b_{k-1} も互いに素でない。

この操作を繰り返すと、 a_1 と b_1 が互いに素でなくなるが、 $a_1 = b_1 = 1$ より矛盾する。

以上より、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 a_n, b_n は互いに素である。

(解説)

頻出の問題です。(1)と(2)の前半は問題なしでしょう。少なくともそこまでは落とせない。

(2)の互いに素であることの証明でつまづいた受験生もいただろう。どこかで a_k と b_k が互いに素でない k が存在と仮定すると矛盾することを言えればいいわけです。

東北大学 2007 年(理・前)第 1 問

n は 2 以上の自然数とする。 x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とおく。

- (1) a_2, b_2 を求めよ。
- (2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。
- (3) 各 n に対して、 a_n, b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。

東北大学 2007 年(理・前)第 1 問

(回答)

(1) $x^2 = (x^2 - 6x - 12) + 6x + 12$ なので、 $a_2 = 6, b_2 = 12$

(2) x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った商を $P_n(x)$ とすると、

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x\{P_n(x)(x^2 - 6x - 12) + a_n x + b_n\} \\ &= xP_n(x)(x^2 - 6x - 12) + a_n x^2 + b_n x \\ &= (xP_n(x) + a_n)(x^2 - 6x - 12) + a_n x^2 + b_n x = (6a_n + b_n)x + 12a_n \end{aligned}$$

これより、 $a_{n+1} = 6a_n + b_n, b_{n+1} = 12a_n$

(3) (1)(2)より、 $a_3 = 48 = 2^4 \cdot 3, b_3 = 72 = 2^3 \cdot 3^2$

帰納的に 2 以上の自然数 n に対して、 a_n と b_n は 2 と 3 を約数として持つ。

a_n と b_n の公約数で素数であるものは 2 と 3 のみであることが推測されるので、そのことを証明する。

ある 4 以上の自然数を k として、 a_{k+1} と b_{k+1} が 2 と 3 以外の素数(即ち 5 以上の素数)を公約数として持つと仮定すると、 $b_{k+1} = 12a_k$ より、 a_k は 5 以上の素数を約数として持ち、

$b_k = 6a_k - a_{k+1}$ より、 b_k も上記と同一の 5 以上の素数を約数として持つ。

即ち、 a_k と b_k が 5 以上の素数の公約数を持つ。

これを繰り返すと、 a_3 と b_3 が 5 以上の素数を公約数として持つことになり、矛盾が生じる。

$\therefore$ 2 以上の自然数 n に対して、 a_n, b_n の公約数で素数となるものは 2 と 3 のみである。

(解説)

べき乗を 2 次式で割った余りに関する問題で、頻出の問題です。(1)と(2)はセンターレベルであり落とせない。

問題は(3)であり、医学部受験生以外の正答率はよくないと思われる。

a_3, b_3 を求めると、素数である公約数は 2 と 3 だろうと推測されます。それをどのように証明するか。

一般項を求めても意味はありません。増加させていく数学的帰納法でも言えません。そうすると背理法です。

しかも、減少させる方向です。その発想さえ出てくれば、後は説明していくのみ。

京都大学(理・前)2003年第4問

多項式 $(x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ は多項式 $x^2 + x + 1$ で割り切れるか。

京都大学(理・前)2003年第4問

(回答)

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ を解くと、} x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

$\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ とおくと、上の方程式の解は ω と ω^2 であり、また、 $\omega^3 = 1$ である。

$f(x) = (x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ とおくと、

$$f(\omega) = (\omega^{100} + 1)^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 = (\omega + 1)^{100} + (-\omega)^{100} + 1 = \omega^{200} + \omega^{100} + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$f(\omega^2) = (\omega^{200} + 1)^{100} + (\omega^4 + 1)^{100} + 1 = (\omega^2 + 1)^{100} + (\omega + 1)^{100} + 1 = \omega^{100} + \omega^{200} + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0$$

これより、 $f(x)$ は $(x - \omega)(x - \omega^2)$ で割り切れ、 $(x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ は $x^2 + x + 1$ で割り切れる。

(解説)

2 次式なので、それを因数分解することを考える(0 としたときの解)とその解の 3 乗が 1 です。

2 次式の形を見ただけで、あーねと思った受験生も多いはず。難関大受験生は完答したい。

京都大学(理・前)2004年第3問

n を2以上の自然数とする。 x^{2n} を $x^2 - x + \frac{n-1}{n^2}$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする。

すなわち、 x の多項式 $P_n(x)$ があつて、 $x^{2n} = P_n(x) \left(x^2 - x + \frac{n-1}{n^2} \right) + a_n x + b_n$ が成り立っているとする。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

京都大学(理・前)2004年第3問

(回答)

$x^{2n} = P_n(x) \left(x^2 - x + \frac{n-1}{n^2} \right) + a_n x + b_n = P_n(x) \left(x - \frac{1}{n} \right) \left(x - \frac{n-1}{n} \right) + a_n x + b_n$ であり、

$x = \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}$ を代入すると、 $\left(\frac{1}{n} \right)^{2n} = \frac{a_n}{n} + b_n, \quad \left(\frac{n-1}{n} \right)^{2n} = \left(\frac{n-1}{n} \right) a_n + b_n$

辺々を引いて、 $a_n = \frac{n}{2-n} \left\{ \left(\frac{1}{n} \right)^{2n} - \left(\frac{n-1}{n} \right)^{2n} \right\} = \frac{1}{\frac{2}{n} - 1} \left\{ \left(\frac{1}{n} \right)^{2n} - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{2n} \right\}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} = e$ なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e^2}$

$b_n = \left(\frac{1}{n} \right)^{2n} - \frac{a_n}{n}$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

(解説)

$x^2 - x + \frac{n-1}{n^2}$ が綺麗に因数分解できます。

なので、その解を代入して辺々を引けば一般項 a_n, b_n が求まります。

a_n の形を見ただけで、受験生たるもの、自然対数がすぐに頭に浮かぶべきです。