

神戸大学(理・前)2006年第4問

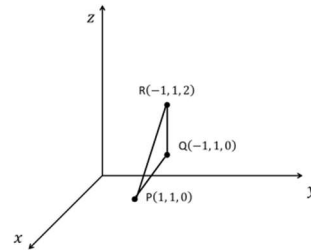
xyz 空間に3点 $P(1, 1, 0)$, $Q(-1, 1, 0)$, $R(-1, 1, 2)$ をとる。次の問いに答えよ。

- (1) t を $0 < t < 2$ を満たす実数とする。平面 $z = t$ と、 $\triangle PQR$ の交わりに現れる線分の2つの端点の座標を求めよ。
- (2) $\triangle PQR$ を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

神戸大学(理・前)2006年第4問

(回答)

- (1) 平面 $z = t$ と線分 PQ の交点は $(-1, 1, t)$ であり、
平面 $z = t$ と線分 PR の交点は $(1 - t, 1, t)$ であり、
これが求める座標である。



- (2) 平面 $z = t$ での断面を考える。

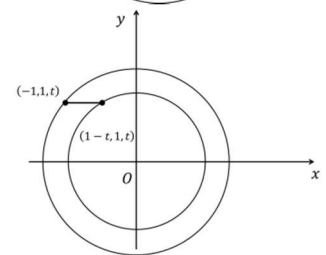
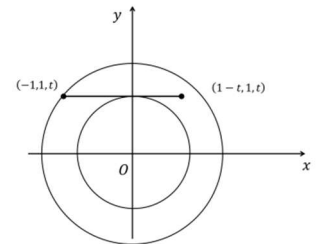
- (i) $0 \leq t \leq 1$ のとき、題意の回転体の断面は右図のドーナツ状の形である。

その断面積は、 $2\pi - \pi = \pi$

- (ii) $1 \leq t \leq 2$ のとき、題意の回転体の断面は右図のドーナツ状の形である。

その断面積は、 $2\pi - \pi\{(1 - t)^2 + 1\} = 2\pi t - \pi t^2$

回転体の体積は、
$$\int_0^1 \pi dt + \int_1^2 \pi(2t - t^2) dt = \pi + \pi \left[t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{5}{3}\pi$$



(解説)

三角形を回転させるドーナツ形の問題です。難関大では頻出。そういった問題の中でも本問は、3点を含む平面が xy 平面に垂直であり、イメージしやすく穏やかです。三角形がどういう配置だろうが、回転軸に垂直な平面と各辺との交点を求めればよく、線分を回転させるのでドーナツ形になります。内径と外径が求まれば、断面積が求まり積分するのみです。

名古屋大学(理・前)1994年第3問

xyz 空間内で、 $0 < a < 1$ である実数 a に対し、 $A(0, 0, 0), B(1-a, 0, 0), C(0, 1, a)$ を頂点とする三角形を考える。この三角形を z 軸のまわりの 1 回転してできる立体の体積を最大にする a を求めよ。また、そのときの体積を求めよ。

名古屋大学(理・前)1994年第3問

(回答)

題意の立体の平面 $z = t$ での断面を考える。 $0 \leq t \leq a$ としてよい。

線分 AC と平面 $z = t$ との交点は、 $\left(0, \frac{t}{a}, t\right)$ であり、

線分 BC と平面 $z = t$ との交点は、 $\left(1-a-\frac{1-a}{a}t, \frac{t}{a}, t\right)$ である。

題意の立体の断面は右図のドーナツ形であり、その面積は

$$\pi \left\{ \left(1-a-\frac{1-a}{a}t\right)^2 + \left(\frac{t}{a}\right)^2 \right\} - \pi \left(\frac{t}{a}\right)^2 = \pi(1-a)^2 \left(1-\frac{t}{a}\right)^2$$

題意の立体の体積を $V(a)$ とすると、

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_0^a \pi(1-a)^2 \left(1-\frac{t}{a}\right)^2 dt \\ &= \int_0^a \pi(1-a)^2 \left(1-\frac{2t}{a}+\frac{t^2}{a^2}\right) dt \\ &= \pi(1-a)^2 \left[t - \frac{t^2}{a} + \frac{t^3}{3a^2} \right]_0^a = \frac{\pi a}{3} (1-a)^2 \end{aligned}$$

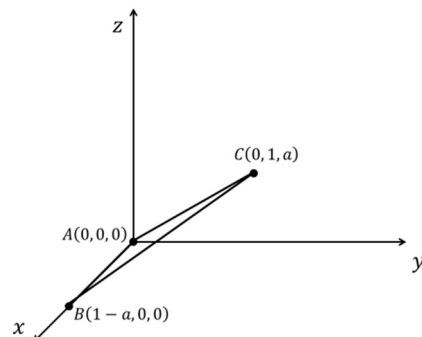
$$V'(a) = \frac{\pi}{3} \{ (1-a)^2 - 2a(1-a) \} = \frac{\pi}{3} (1-a)(1-3a)$$

a		$\frac{1}{3}$		1
$V'(a)$	+	0	-	0
$V(a)$	↗	$\frac{4}{81}\pi$	↘	

$$a = \frac{1}{3} \text{ のとき、求める最大値は } \frac{4}{81}\pi$$

(解説)

三角形を回転させるドーナツ形の問題です。難関大では頻出。そういった問題の中でも本問は、3点を含む平面が xy 平面に垂直であり、イメージしやすい。増減表も用意しやすく穏やかです。三角形が綺麗な or 綺麗なない配置の場合、回転軸との関係より場合分けが必要な場合の演習を行っていれば対応できる問題。



東北大学(理・前)2007年第5問

xyz 空間において、点 $(1, 0, 1)$ と点 $(1, 0, 2)$ を結ぶ線分を l とし、 l を z 軸のまわりに一回転してできる図形を A とする。 A を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を求めよ。

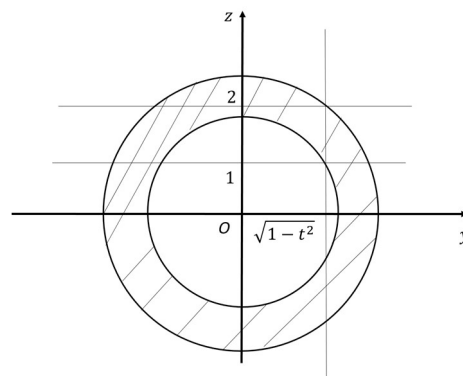
東北大学(理・前)2007年第5問

(回答)

平面 $x = t (-1 \leq t \leq 1)$ において、 A は2つの線分であり、求める立体の切り口は下図のドーナツ状の形である。

$$\text{切り口の面積は、} \pi \left\{ 2^2 + \left(\sqrt{1-t^2} \right)^2 \right\} - \pi \left\{ 1^2 + \left(\sqrt{1-t^2} \right)^2 \right\} = 3\pi$$

$$\text{求める体積は、} 2 \int_0^1 3\pi dt = 6\pi$$



(解説)

余りに簡単すぎて、びっくりしました。平面 $x = t$ で切ったとき、 A は2つの線分です。

A が本問では円柱の側面ですが、円柱の内部も含むものだと、同じくドーナツ状の形ですが、積分計算が出てきます。

東京大学(理・前)1984年第4問

空間内に、3点 $P\left(1, \frac{1}{2}, 0\right), Q\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right), R\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ を頂点とする正三角形の板 S がある。

S を z 軸のまわりに1回転させたとき、 S が通過する点全体の作る立体の体積を求めよ。

東京大学(理・前)1984年第4問

(回答)

平面 $z = t$ での断面を考える。 $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$ の範囲で考えればよい。

S の平面 $z = t$ での断面は線分であり、その長さを a とすると、

$$\text{右図より、} 1 : a = \frac{\sqrt{3}}{4} : \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - t\right) \therefore a = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{3}t$$

この線分と $(0, 0, t)$ との距離を b とすると、

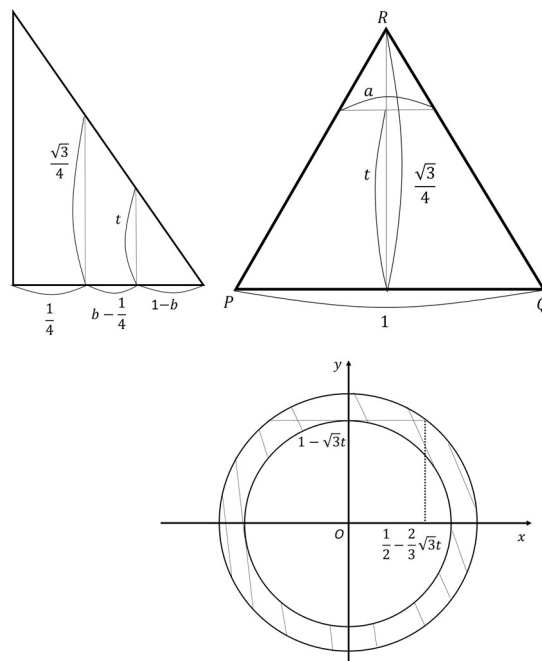
$$\text{右図より、} \frac{\sqrt{3}}{4} : t = \frac{3}{4} : (1 - b) \therefore b = 1 - \sqrt{3}t$$

右図のように題意の立体の $z = t$ 平面での断面は右図のようなドーナツ状の形であり、その面積は

$$\pi \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3}t \right)^2 + (1 - \sqrt{3}t)^2 \right\} - \pi (1 - \sqrt{3}t)^2 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3}t \right)^2$$

求める立体の体積は、

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3}t \right)^2 dt = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pi \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3}t \right)^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{48} \pi$$



(解説)

三角形を平面で切ると線分になり、線分を回転させるとドーナツ。

その線分がどんな線分かと考えます。 PQ が y 軸に平行なことかが計算を楽にしてくれていますし、比較的状况をイメージしやすいでしょう。