

東京工業大学(前)2004年第4問

$0 < r < 1$ とする。空間において、点 $(0, 0, 0)$ を中心とする半径 r の球と点 $(1, 0, 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{1 - r^2}$ の球との共通部分の体積を $V(r)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $V(r)$ を求めよ。

(2) r が $0 < r < 1$ の範囲を動くとき、 $V(r)$ を最大にする r の値および $V(r)$ の最大値を求めよ。

東京工業大学(理・前)2004年第4問

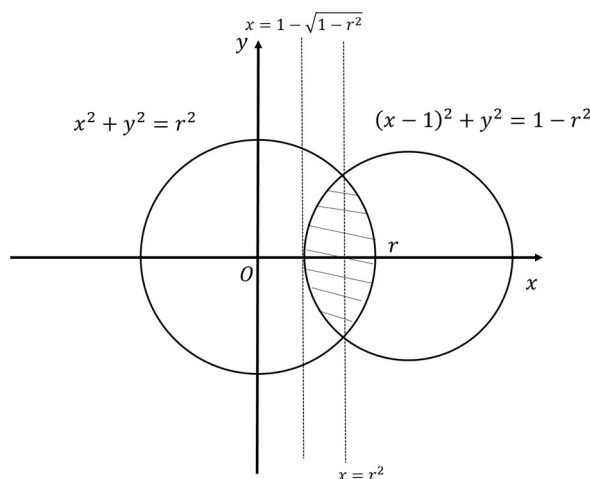
(回答)

(1) x 軸を含むいかなる平面においても、題意の 2 つの球の切り口は同じであり、共通部分も同一の形である。

$V(r)$ は図の斜線部分

$(x^2 + y^2 \leq r^2, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 - r^2)$ の共通部分

を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積に等しい。



$$V(r) = \pi \int_{r^2}^r (r^2 - x^2) dx + \pi \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2} \{1 - r^2 - (x - 1)^2\} dx$$

$$= \pi \left\{ \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r^2}^r + \left[x - r^2 x - \frac{1}{3} (x - 1)^3 \right]_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2} \right\}$$

$$= \pi \left\{ r^3 - \frac{r^3}{3} - r^4 + \frac{r^6}{3} + r^2 - r^4 - \frac{1}{3} (r^2 - 1)^3 - 1 + \sqrt{1 - r^2} + r^2 (1 - \sqrt{1 - r^2}) - \frac{1}{3} (1 - r^2) \sqrt{1 - r^2} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{3} \left\{ -3r^4 + 2r^3 + 3r^2 - 2 + 2(1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$(2) V'(r) = \frac{\pi}{3} \left\{ -12r^3 + 6r^2 + 6r + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{1 - r^2} (-2r) \right\} = 2\pi r \left\{ -2r^2 + r + 1 - \sqrt{1 - r^2} \right\}$$

$$= 2\pi r \cdot \frac{(-2r^2 + r + 1)^2 - (1 - r^2)}{-2r^2 + r + 1 + \sqrt{1 - r^2}} = 4\pi r^2 \cdot \frac{(r - 1)(\sqrt{2}r + 1)(\sqrt{2}r - 1)}{-2\left(r - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} + \sqrt{1 - r^2}}$$

r	(0)		$1/\sqrt{2}$		(1)
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗		↘	

増減表より、 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $V(r)$ は最大値をとり、その値は、 $\frac{\pi}{3} \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{3} \left(-\frac{5}{4} + \sqrt{2} \right)$

(解説)

共通部分ということで切り口を考えたくになりますが、本問はそれでは非常につらいです。

冒頭の説明の通り回転体として考えます。それ以降は基礎的ですが、(1)(2)とも相当な計算量です。

完答者はほとんどいなかったのではないかと思います。

設定は良問ですが、2 つの半径の与え方が違えば計算量が抑えられたかと思いますが、

手を付けられる問題が他になかったら、頑張って計算してみる程度でいいでしょう。

東京大学(理・前)2004年第5問

r を正の実数とする。 xyz 空間内の原点 $O(0,0,0)$ を中心とする半径 1 の球を A 、点 $P(r,0,0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし、球 A と球 B の和集合とは、球 A または球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

(1) V を r の関数として表し、そのグラフの概形をかけ。

(2) $V = 8$ となるときの、 r の値はいくらか。四捨五入して少数第 1 位まで求めよ。

注意：円周率 π は、 $3.14 < \pi < 3.15$ を満たす。

東京大学(理・前)2004年第5問

(回答)

(i) $r > 2$ のとき、2 つの球は共通部分持たないことから V は 2 つの球の体積の和であり、 $V = \frac{8\pi}{3}$

(ii) $0 < r \leq 2$ のとき、

球 A と球 B は共通部分を持つ。

対称性から右図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させて
できる立体の体積の 2 倍が V であるので、

$$V = 2\pi \int_{-1}^{\frac{r}{2}} (1 - y^2) dy = \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{\frac{r}{2}} = \pi \left(-\frac{r^3}{12} + r + \frac{4}{3} \right)$$

$$V' = \pi \left(-\frac{r^2}{4} + 1 \right) = -\pi \left(\frac{r}{2} + 1 \right) \left(\frac{r}{2} - 1 \right) \geq 0$$

$$V'' = \pi \left(-\frac{r}{2} \right) < 0$$

以上より、グラフの概形は右図の通り。

(2) $\frac{8\pi}{3} > \frac{8}{3} \cdot 3.14 > 8.3$ 、また $r = 1$ のとき、 $V = \frac{9}{4}\pi < \frac{9}{4} \cdot 3.15 < 7.1$

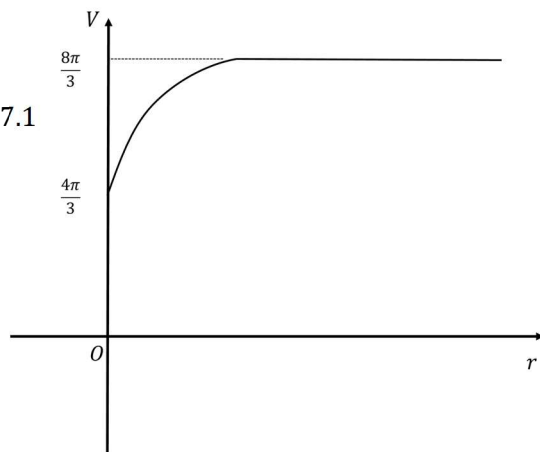
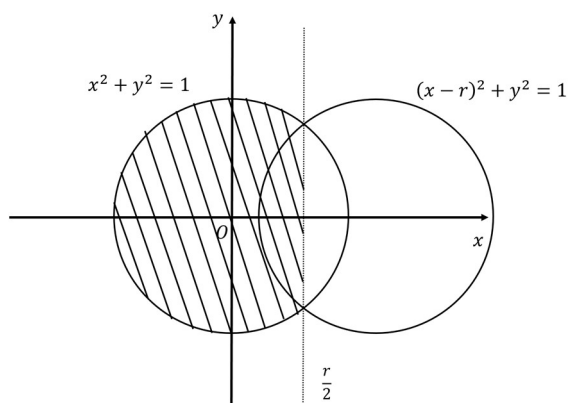
求める r は、 $1 < r < 2$

$$r = 1.5 \text{ のとき、} V = \frac{245}{96}\pi > 8.01$$

$r = 1.4$ のとき、 $V < 7.9$

$r = 1.45$ のとき、 $V > 7.9$

以上より、求める r の値は、1.5



(解説)

球の重なりを考える問題です。難関大ではそれなりに出題されますが、慣れていないとその場で対応は、難しいでしょう。演習しておくべきです。(2)は正直、あまり好きではありません。(1)だけで十分？
 r の値を徐々に絞り込んでいき、1.45 より大きく 1.5 より小さいというところまで行ければ終了です。
とはいえ、この桁の計算を繰り返させるのは、いかがなものか。