

東京工業大学(後)1993年第1問

一辺の長さが1の立方体を、中心を通る対角線のうち一本を軸として回転させたとき、この立方体が通過する部分の体積を求めよ。

東京工業大学(後)1993年第1問

(回答)

右図のように一辺の長さが1の立方体を座標空間に配置し、

OF を軸として回転させることを考える。

線分 OF 上に $OP = r(0 \leq r \leq \sqrt{3})$ となるように P を設定し、

P を通り、 OF に垂直な平面での回転体との切り口を考える。

立方体は中心に対して点対称なので、中心を通る線分を軸として回転体は、

中心を通り、その軸に垂直な平面に対して対称であるので、 $r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ として考える。

正方形 $OAED$ の内部及び周に含まれる点を H とすると、

$\vec{OH} = s\vec{OA} + t\vec{OE} = (s, 0, t) (0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1)$ とおける。

$\vec{OP} = \frac{r}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ であり、 H が P を通り OF に垂直な平面上にあるとすると、

$$\vec{OP} \cdot \vec{PH} = \frac{r}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \cdot \left(s - \frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}}, t - \frac{r}{\sqrt{3}}\right) = 0 \text{ より、 } s + t = \sqrt{3}r$$

P を通り、 OF に垂直な平面が正方形 $OAED$ と共通部分が存在する場合、それは線分であり、その端点において $s = 0, 1$ または $t = 0, 1$ である。また、線分と点の距離が最大となり得るのは線分の端点である。

$s = 0$ のとき、 $1 \geq t = \sqrt{3}r$ なので、 $r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ であり、 $t = 0$ のとき、 $1 \geq s = \sqrt{3}r$ なので、 $r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

$s = 1$ のとき、 $1 + t = \sqrt{3}r$ なので、 $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、 $t = 1$ のとき、 $1 + s = \sqrt{3}r$ なので、 $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

(i) $r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、

対称性を考慮すると、 P を通り垂直な面での切り口は三角形になり、このとき、

$$|\vec{PH}|^2 = \left(s - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(t - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 = s^2 + t^2 - \frac{2r}{\sqrt{3}}(s + t) + r^2$$

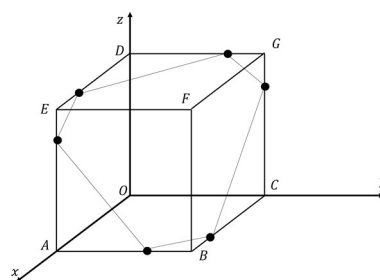
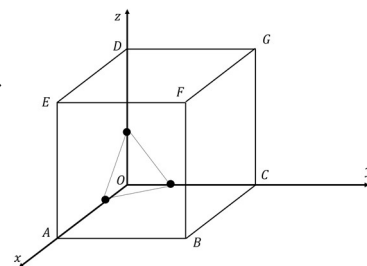
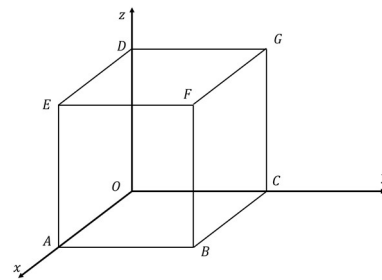
これより、 $|\vec{PH}|^2$ の最大値は $2r^2$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、

対称性を考慮すると、 P を通り垂直な面での切り口は右図のようになる。

$$|\vec{PH}|^2 \text{ の最大値は } 1 + (\sqrt{3}r - 1)^2 - \frac{2r}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}r + r^2 = 2r^2 - 2\sqrt{3}r + 2$$

(回答続く)



東京工業大学(後)1993年第1問

(回答続き)

求める体積を V とすると、

$$\frac{V}{2} = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2r^2 dr + \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (2r^2 - 2\sqrt{3}r + 2) dr = \pi \left[\frac{2}{3} r^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \pi \left[\frac{2}{3} r^3 - \sqrt{3} r^2 + 2r \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi$$

$$\therefore V = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$$

(解説)

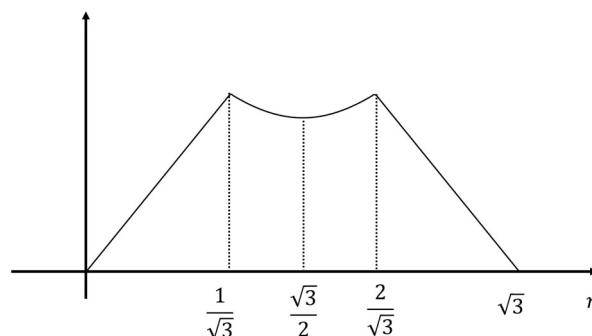
設定は綺麗ですが、難しいですが、文系でも出題されことのある問題です。

京都大学(理甲&文・前)2010年や慶應大学(理工)1998年(誘導付き)など難関大では何度か出題されており、再度出題されてもおかしくない問題で、解法を頭に入れましょう。青山学院大(理工)2005年では、非常に丁寧な誘導付きで切り口まででした。解いたことがなければ完答は難しいでしょう。

今回はベクトルの的に考えていきました。回転軸に垂直な平面での切り口を考えればいいわけです。

平面が正方形と共通部分が存在する場合、それは線分であり、また、線分と点の距離が最大となり得るのは線分の端点であることが鍵です。当然、端点は正方形の周上に来ます。そこまでわかれば、計算は大したことありません。右図のような図形を回転させた体積を

結局求めていることになります。



京都大学(理甲・前)2010年第6問

座標空間内で、 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,1,0), D(0,0,1), E(1,0,1), F(1,1,1), G(0,0,1)$ を頂点に持つ立方体を考える。この立方体を対角線 OF を軸として回転させた得られる回転体の体積を求めよ。

京都大学(理甲・前)2010年第6問

(回答)

東京工業大学(後)1993 年第 1 問と全く同じなので、そちらを見てください。