**早稲田大学(理工・前)2008年第1問**

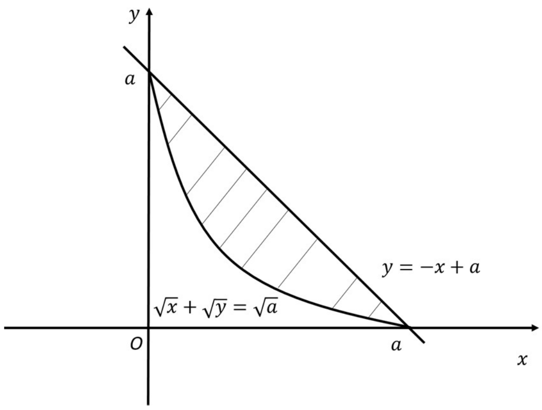
$a$を正の整数とする。$xy-$座標平面において、曲線$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$と、直線$x+y=a$とで囲まれた部分をDとおく。以下の問に答えよ。

(1) Dの概形を描き、その面積を求めよ。

(2) 直線$x+y=a$を軸として、Dを1回転してできる図形の体積を求めよ。

**早稲田大学(理工・前)2008年第1問**

**（解答）**




(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$より、$0\leq x\leq a$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$を変形すると、$y=a+x-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}$

$y'=1-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}, y''=\dfrac{1}{2}\sqrt{a}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$となる。

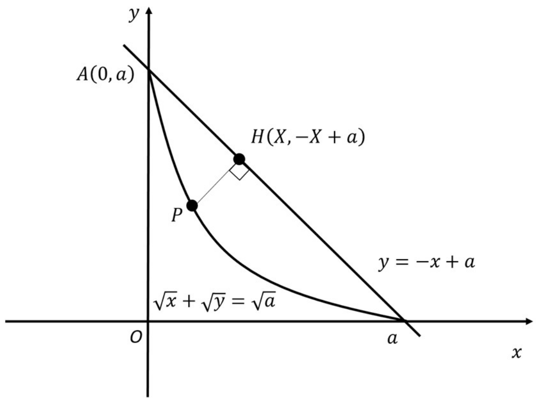
また、$\displaystyle\lim_{x\to+0}y'=-\infty, \lim_{x\to a-0}y'=0$

以上より、Dは右図の斜線部分である。

求める面積$S$とすると、

$$S=\int_0^a\{-x+a-(a+x-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x})\}dx$$

$$=\int_0^a(-2x+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x})dx=\left[-x^2+\frac{4}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{a^2}{3}$$




(2) 右図のように$P,H$をおくと、直線$PH$の方程式は、

$y=(x-X)-X+a=x-2X+a$

$P$の$x$座標は、$x-2X+a=a+x-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}$より $x=\dfrac{X^2}{a}$なので、

$$PH=\sqrt{2}\left(X-\frac{X^2}{a}\right)$$

$AH=r$とおくと、$r=\sqrt{2}X$

求める体積を$V$とすると、

$$\mathrm{V}=\pi\int_0^{\sqrt{2}a}PH^2dr=\pi\int_0^a\left\{\sqrt{2}\left(X-\frac{X^2}{a}\right)\right\}^2\cdot\sqrt{2}dX$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_0^a\left\{X^2-\frac{2X^3}{a}+\frac{X^4}{a^2}\right\}^2dX=2\sqrt{2}\pi\left[\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{2a}+\frac{X^5}{5a^2}\right]_0^a=\frac{\sqrt{2}}{15}\pi a^3$$

**（解説）**

斜回転の問題です。1度解いてみたことがあれば解法は浮かぶはず。

曲線の方程式にルートが含まれているので面倒に見えますが、題意の直線の傾きが－1であることから、計算量を節約していきましょう。

**東北大学(理・前)2018年第6問**

$xy$平面内の図形$S$：$\begin{cases} x+y^2 \leq 2 \\ x+y \geq 0 \\ x-y \leq 2 \end{cases}$ を考える。図形$S$を$y=-x$のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を$V$

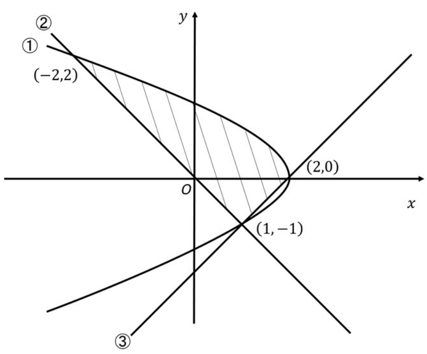
とする。

(1) $S$を$xy$平面に図示せよ。

(2) $V$を求めよ。

**東北大学(理・前)2018年第6問**

（回答）




(1) $x+y^2=2 \cdots$①、$x+y=0\cdots$②、$x-y=2\cdots$③とする。

①と②の交点の$x$座標は、$x+x^2-2=(x+2)(x-1)=0$ より、

$x=-2,1$ なので、交点は$(1,1),(-2,2)$

①と③の交点の$x$座標は、$x+(x-2)^2-2=(x-2)(x-1)=0$ より、

$x=1,2$ なので、交点は$(1,-1),(2,0)$

②と③の交点の$x$座標は、$x+x-2=2(x-1)=0$ より、

$x=1$ なので、交点は$(1,-1)$

以上より、右図の斜線部分が$S$である。

(2) ①上に点 $\mathrm{P}(2-t^2,t)(-1 \leq t \leq 2)$をとり、点 P から直線②に下した垂線の足を H とする。

$\mathrm{PH}=h$ とし、H と$(1,-1)$の距離を$r$とすると、$h=\dfrac{|2-t^2+t|}{\sqrt{2}}$である。

また、PH を表す方程式は、$y=x-2+t^2+t$

これと、②との交点の$x$座標は、$x-2+t^2+t-(-x)=2\left(x-\dfrac{2-t^2-t}{2}\right)=0$ より、$x=\dfrac{2-t^2-t}{2}$

これより、$r=\sqrt{2}\left(1-\dfrac{2-t^2-t}{2}\right)$ $\therefore dr=\dfrac{2t+1}{\sqrt{2}}dt$

$$V=\pi\int_0^{3\sqrt{2}} h^2 dr=\pi\int_0^2 \frac{(2-t^2+t)^2}{2}\cdot\frac{2t+1}{\sqrt{2}}dt$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^2 (2t^5-3t^4-8t^3+5t^2+12t+4)dt$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}t^6-\frac{3}{5}t^5-2t^4+\frac{5}{3}t^3+6t^2+4t\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{64}{3}-\frac{96}{5}-32+\frac{40}{3}+24+8\right)=\frac{58}{15}\sqrt{2}\pi$$

（解説）

斜回転の問題です。1 度解いてみたことがあれば解法は浮かぶはず。

**岡山大学(理・前)2019年第4問**

座標平面において線分$L: y=x(0\leq x\leq 1)$, 曲線$C: y=x^2-x+1(0\leq x\leq 1)$および$y$軸で囲まれた図形を$D$とする。以下の問いに答えよ。

(1) $C$上の点 $\mathrm{P}(t, t^2-t+1)$から$L$に下ろした垂線との交点 Q とする。線分 OQ の長さ$u$を$t$で表せ。
ただし、O は原点とする。

(2) (1)の P, Q について線分 PQ の長さを$t$を用いて表せ。

(3) 図形$D$を直線$y=x$のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

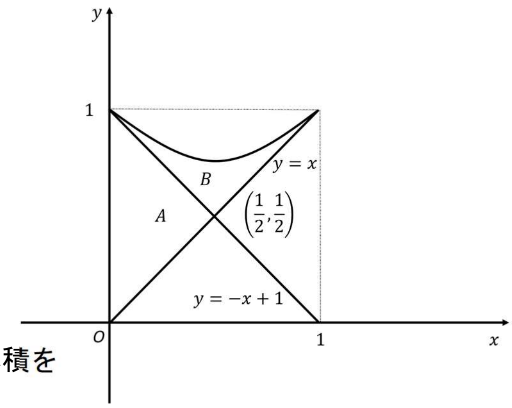
**岡山大学(理・前)2019年第4問**

（回答）

(1) 直線 PQ を表す方程式は、$y=-(x-t)+t^2-t+1$ なので、$y=x$と連立させると、

$x=-(x-t)+t^2-t+1=-x+t^2+1 \quad \therefore x=\dfrac{t^2+1}{2}$

これよい、$u=\dfrac{t^2+1}{2}\cdot\sqrt{2}=\dfrac{t^2+1}{\sqrt{2}}$




(2) PQ の長さは、$\left(\dfrac{t^2+1}{2}-t\right)\cdot\sqrt{2}=\dfrac{(t-1)^2}{\sqrt{2}}$

(3) 右図の A と B を$y=x$のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ$V_A, V_B$とする。

$V_A=\pi\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\pi$

(1)より$du=\sqrt{2}tdt=0$ である。

$$V_B=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} PQ^2\,du=\pi\int_0^1\frac{(t-1)^4}{2}\cdot\sqrt{2}dt=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1(t-1)^4tdt$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left\{\left[\frac{t}{5}(t-1)^5\right]_0^1-\int_0^1\frac{(t-1)^5}{5}dt\right\}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left\{-\left[\frac{(t-1)^6}{30}\right]_0^1\right\}=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$$

求める体積は、$V_A+V_B=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\pi+\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi=\dfrac{\sqrt{2}}{10}\pi$

（解説）

頻出というほどではない斜回転の問題です。1 度解いてみたことがあれば解法は浮かぶはずです。
誘導もあるので完答したい。