

東北大学2019年(文・後)第1問

次の等式を満たす実数 a をすべて求めよ。

$$\int_0^1 |x^2 - ax| dx = \frac{1}{3}$$

東北大学2019年(文・後)第1問

(解答)

$$\text{与式} = \int_0^1 x|x - a| dx$$

(i) $a \geq 1$ のとき

$$\text{与式} = \int_0^1 (-x^2 + ax) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}a = \frac{1}{3} \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

(ii) $a \leq 0$ のとき

$$\text{与式} = \int_0^1 (x^2 - ax) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a = \frac{1}{3} \quad \therefore a = 0$$

(iii) $0 < a < 1$ のとき

$$\text{与式} = \int_0^a (-x^2 + ax) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 \right]_a^1 = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

これより、 $\frac{a}{6}(\sqrt{2}a + \sqrt{3})(\sqrt{2}a - \sqrt{3}) = 0$ なので、これを満たす a は存在しない。

以上より、 $a = 0, \frac{4}{3}$

(解説)

よくある絶対値のついた定積分ですが、文系ということもあり難しくありません。

当然ですが、絶対値を外したくなりますが、すんなり外せないので、場合分けをするのが常套手段です。

結局、上記のような解答になります。確実に正解しましょう。

北海道大学2017年(理・前)第2問

関数 $f(x) = 1 + \sin x - x \cos x$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ における増減を調べ、最大値と最小値を求めよ。
- (2) $f(x)$ の不定積分を求めよ。
- (3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

北海道大学2017年(理・前)第2問

(解答)

$$(1) f'(x) = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x$$

x	0		π		$\frac{3}{2}\pi$		2π
$f'(x)$	0	+	0	-	-	-	0
$f(x)$	1	↗	$1 + \pi$	↘	0	↘	$1 - 2\pi$

∴ 増減表より、最大値は $1 + \pi$ 、最小値は $1 - 2\pi$

$$(2) \int f(x) dx = \int (1 + \sin x - x \cos x) dx$$

$$= x - \cos x - \int (x \cos x) dx$$

$$= x - \cos x - \left(x \sin x - \int \sin x dx \right)$$

$$= x - 2\cos x - x \sin x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(3) \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} f(x) dx$$

$$= [x - 2\cos x - x \sin x]_0^{\frac{3}{2}\pi} - [x - 2\cos x - x \sin x]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi + 2 \right) - \left(2\pi - 2 - \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$= 4 + 4\pi$$

(解説)

難しくない問題です。基本さえ押さえていれば回答できます。

きちんと誘導されており、基本を問う、かつ部分点で差をつけようといういい問題だと思います。

確実に正解しましょう。

東京工業大学 2011 年(前)第 2 問

実数 x に対して、 $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - x \sin 2t| dt$ とおく。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^1 f(x) dx$ を求めよ。

東京工業大学 2011 年(前)第 2 問

(回答)

$$(1) f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - x \sin 2t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t |1 - 2x \sin t| dt$$

$$(i) x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき、} f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - x \sin 2t) dt = \left[\sin t + \frac{x}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - x$$

$$(ii) x \geq \frac{1}{2} \text{ のとき、} 1 - 2x \sin \alpha = 0 \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ となる } \alpha \text{ が存在する。}$$

$$\text{このとき、} \sin \alpha = \frac{1}{2x}, \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2x^2}$$

$$f(x) = \int_0^{\alpha} (\cos t - x \sin 2t) dt - \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - x \sin 2t) dt = \left[\sin t + \frac{1}{2} x \cos 2t \right]_0^{\alpha} - \left[\sin t + \frac{1}{2} x \cos 2t \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin \alpha + \frac{1}{2} x \cos 2\alpha - \frac{1}{2} x - 1 + \frac{1}{2} x + \sin \alpha + \frac{1}{2} x \cos 2\alpha$$

$$= 2 \sin \alpha + x \cos 2\alpha - 1 = \frac{1}{x} + x - 1$$

$x \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $f(x)$ は単調減少なので、 $x \geq \frac{1}{2}$ についてのみ考えればよい。

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^2} + 1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \sqrt{2} \right) \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2} \right)$$

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$f'(x)$		—	0	+
$f(x)$		↘	$\sqrt{2} - 1$	↗

∴ 求める最小値は、 $\sqrt{2} - 1$

$$(2) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2x} + x - 1 \right) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} x^2 - x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log 2$$

(解説)

(2) はおまけのような問題です。絶対値付きの積分という設定で、当然絶対値の外れ方を考え、場合分けします。

後半だけを考えればよいように、 $x = \frac{1}{2}$ のときは、あえて両方の場合に含めました。

綺麗な形が出てくるとすっきりですね。絶対値の外しが終われば微分するのみ、ここ以降はセンターレベルです。

難関大受験生は完答必須でしょう。

東北大学2012年(理・前)第4問

$0 \leq x \leq \pi$ に対して、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|} dt$$

と定める。 $f(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。

東北大学2012年(理・前)第4問

(回答)

(i) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ のとき、

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x-t)}{1+\sin(x-t)} dt = [-\log\{1+\sin(x-t)\}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \log \frac{1+\sin x}{1+\sin(x-\frac{\pi}{2})} = \log \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$$

$$g(x) = \frac{1+\sin x}{1-\cos x} \text{とおくと、} g'(x) = \frac{\cos x(1-\cos x) - \sin x(1+\sin x)}{(1-\cos x)^2} = \frac{-1-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}{(1-\cos x)^2}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \text{より、} -1 - \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) \leq 0 \text{なので、}$$

$$f(x) \text{の最大値は} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \log 2, \text{最小値は} f(\pi) = -\log 2$$

(ii) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos(x-t)}{1+\sin(x-t)} dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t-x)}{1+\sin(t-x)} dt$$

$$= [-\log\{1+\sin(x-t)\}]_0^x + [\log\{1+\sin(t-x)\}]_x^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \log(1+\sin x) + \log\left\{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}$$

$$= \log(1+\sin x) + \log(1+\cos x)$$

$$= \log(1+\sin x)(1+\cos x)$$

$h(x) = (1+\sin x)(1+\cos x)$ とおくと、

$$h'(x) = \cos x(1+\cos x) - \sin x(1+\sin x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x + 1)$$

$$\text{これより、} f(x) \text{の最大値は} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{最小値は} f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \log 2$$

$$(i)(ii) \text{より、} f(x) \text{の最大値は} 2 \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{最小値は} -\log 2$$

(解説)

よくある絶対値付きの定積分です。場合分けして絶対値を外すのが常套手段です。対数関数が単調増加なので、微分する際は真数のみを考えていけばいいです。それなりの計算量であるが、こなしたい。