名古屋大学**2014**年(理・前)第**2**問

実数tに対して 2 点 $\mathrm{P}(t,t^2),\mathrm{Q}(t+1,(t+1)^2)$を考える。$t$が$-1\leq t\leq 0$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形を図示し、その面積を求めよ。

名古屋大学**2014**年(理・前)第**2**問

（回答）

線分 PQ 上の点を $\mathrm{R}(X,Y)$とすると、$Y=(2t+1)(X-t)+t^2=-\left(t+\dfrac{1-2X}{2}\right)^2+X^2+\dfrac{1}{4}$となり、

これより、$Y\leq X^2+\dfrac{1}{4}$

点 P、Q は$y=x^2$上の点であり、$\mathrm{P_1}(-1,1)$から原点に、

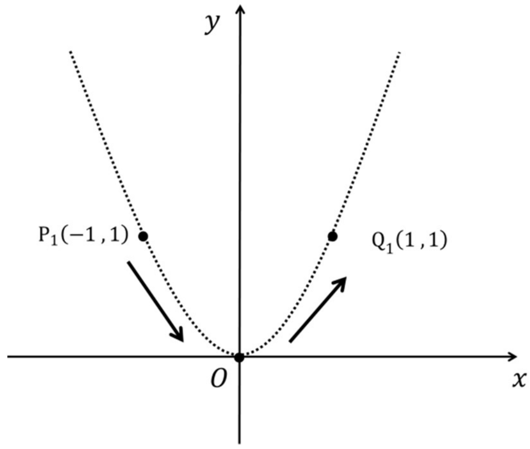
原点から$\mathrm{Q_1}(1,1)$に動くので、$Y\geq X^2$であり、$-1\leq X\leq 1$

線分 PQ の方程式を変形すると、

$$Y=(2t+1)X-t^2-t=(2t+1)\left(X-\frac{2t+1}{2}\right)+\left(\frac{2t+1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

これより、直線 PQ は$Y=X^2+\dfrac{1}{4}$の$\left(\dfrac{2t+1}{2},\left(\dfrac{2t+1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right)$

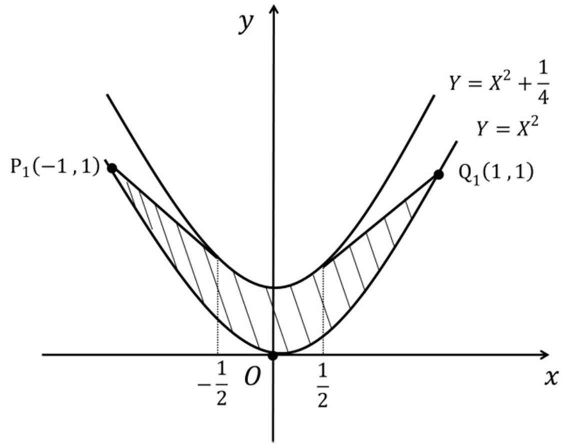
における接線である。接点は$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$から$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$まで動く。



以上より、放物線の凸性を考慮すると、

求める領域は右図の斜線部分である。

対称性を考慮して面積を求めると、



$$2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(X^2+\frac{1}{4}-X^2\right)dX+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(X-X^2)dX$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+2\left[\frac{X^2}{2}-\frac{X^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{5}{12}$$

（解説）

難関大では頻出の線分の通過領域を求める問題です。面積はおまけです。近年はXを固定してYの範囲を求める解法が多くの参考書で見られますが、私は上記のような解法が好きです。

まず、直線の方程式を求め、それを満たす実数tが存在するための条件を求めています。即ち、直線の通過領域を求めています。次に P、Q がどういう曲線上を動くかを考え、線分 PQ の通過領域をしぼっています。次に直線 PQ の性質について見方を変えています。$Y=X^2+\dfrac{1}{4}$と線分の方程式を連立させ共有点（接点）を求め、それを念頭に線分の方程式を変形しています。(接点を求める過程は問題用紙の隅で計算すればよいでしょう)。そうすると直線 PQ が$Y=X^2+\dfrac{1}{4}$の$\left(\dfrac{2t+1}{2},\left(\dfrac{2t+1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right)$における接線であることが分かりますので、そうすると放物線の凸性から上記のようになります。

横浜国大 2009 年（後期）に全く同じ問題があります。

京都大学**1984**年(理・前)第**3**問

実数tによって定まる点$P(t+1, t)$と $Q(t-1, -t)$がある。

(1) tはすべての実数を動くとき、直線PQの通過する範囲を図示せよ。

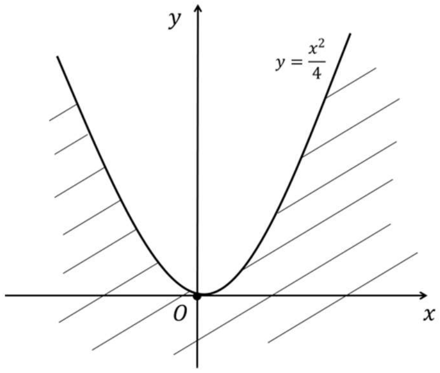
(2) tが区間$[0, 1] = \{t \mid 0 \leq t \leq 1\}$を動くとき、線分$PQ$が通過する範囲の面積を求めよ。

京都大学**1984**年(理・前)第**3**問

（回答）

(1) 直線PQの方程式は、$y = t(x-t-1)+t = -t^2+tx = -\left(t-\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{4}$なので、$y \leq \frac{x^2}{4}$

求める領域は右図の斜線部分である。



(2) 線分PQ上の点を(X, Y)とする。

$Y = -t^2 + tX = t(X-2t)$より、直線PQは放物線$Y = \frac{X^2}{4}$の

$(2t, t^2)$における接線である。

また、Pは$y = x-1$ 上と$P_1(1,0)$から$P_2(2,1)$に動き、

Qは$y = -x-1$ 上と$Q_1(-1,0)$から$P_2(0,-1)$に動く。

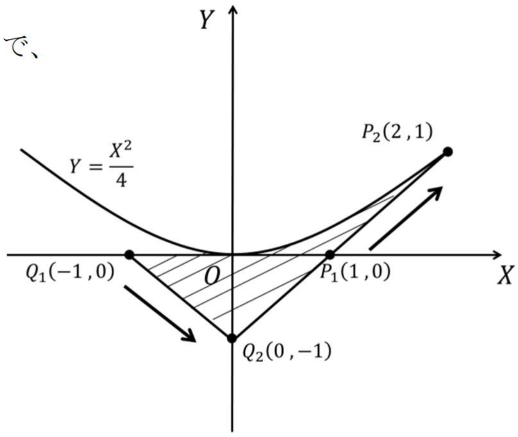
このとき、上記の接点は$(0,0)$から$(2,1)$まで動く。

また、線分PQは線分Q_1Q_2より上側であり、P_1Q_2より上側であるので、

線分PQの通過領域は右図の斜線部分である。

求める面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 + \int_0^2 \frac{X^2}{4}dX - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2} + \left[\frac{X^3}{12}\right]_0^2 = \frac{7}{6}$$



（解説）

難関大では頻出の線分の通過領域を求める問題です。面積はおまけです。(1)は直線の方程式を求め、tが存在する条件から求まります。(2)は線分 PQ がどのような直線に含まれるかを見方を変えて考えます。また、題意のときPとQがどのように動くかを考えると自ずと求まります。

東京大学2014年(理・前)第6問

座標平面の原点をOで表す。

線分$y=\sqrt{3}x(0\leq x\leq 2)$上の点$P$と、$y=-\sqrt{3}x(-2\leq x\leq 0)$上の点$Q$が線分$OP$と線分$OQ$の長さの和が 6 となるように動く。このとき、線分PQの通過する領域をDとする。

(1) sを $0\leq s\leq 2$ をみたす実数とするとき、点(s,t)がに入るようなtの値の範囲を求めよ。

(2) Dを図示せよ。

東京大学2014年(理・前)第6問

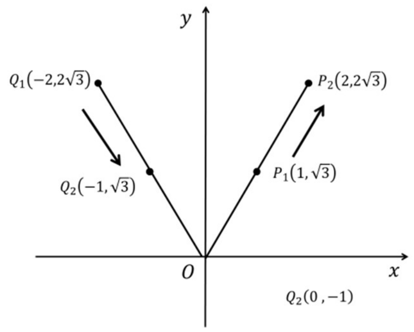
（回答）

(1) $P\left(x_1,\sqrt{3}x_1\right)$, $Q\left(x_2,-\sqrt{3}x_2\right)$とおくと、$OP+OQ=6$ より、$x_1-x_2=3$

これより、$1\leq x_1\leq 2$ であり、$-2\leq x_2\leq -1$

このことから、Pは$P_1\left(1,\sqrt{3}\right)$から$P_2\left(2,2\sqrt{3}\right)$に動き、

Qは$Q_1\left(-2,2\sqrt{3}\right)$から$Q_2\left(-1,-\sqrt{3}\right)$に動く。



直線PQの方程式は、

$$y=\frac{-\sqrt{3}x_2-\sqrt{3}x_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+\sqrt{3}x_1=-\frac{2\sqrt{3}x_1^2}{3}+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}\right)x_1-\sqrt{3}x$$

$$\frac{2\sqrt{3}x_1^2}{3}-2\sqrt{3}\left(\frac{x}{3}+1\right)x_1+y+\sqrt{3}x=0$$

これが実数解を持つので、$\dfrac{判別式}{4}=3\left(\dfrac{x}{3}+1\right)^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\left(y+\sqrt{3}x\right)=\dfrac{x^2}{3}+3-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y\geq 0$ $\therefore y\leq\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x^2+9)$

直線PQの方程式を変形すると、

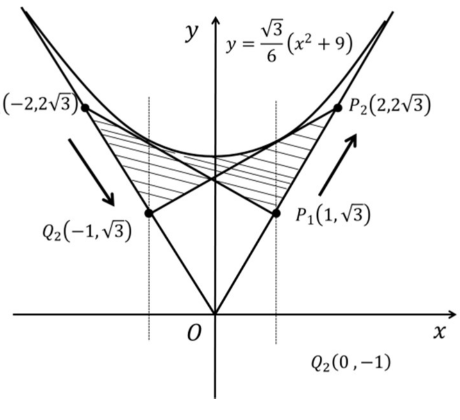
$$y=-\frac{2\sqrt{3}x_1^2}{3}+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}\right)x_1-\sqrt{3}x=\frac{\sqrt{3}}{3}(2x_1-3)(x-2x_1+3)+\frac{\sqrt{3}}{6}\{(2x_1-3)^2+9\}$$

なので、PQは$y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x^2+9)$上の$\left(2x_1-3,\dfrac{\sqrt{3}}{6}\{(2x_1-3)^2+9\}\right)$における接線であり、

接点は$\left(-1,\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$から$\left(1,\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$まで動く。

以上より、Dは右図の斜線部分であるので、

$$\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\leq t\leq\dfrac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)(0\leq s\leq 1)\\ \sqrt{3}s\leq t\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(1\leq s\leq 2)\end{cases}$$



(2) (1)の通り。

（解説）

難関大では頻出の線分の通過領域を求める問題です。tを固定してsのとり得る値を考える解法よりもやはりこちらの解法の方がイメージしやすい。まずは、PとQがどういう動く気をするか考える。

次に直線の方程式を求め、実数解が存在する条件からしぼりこむ。その直線が接する放物線を考える。

放物線は実数解の条件で求めたものであり、傾きを考えれば接点が分かります。枠外でこの計算しています。でないと、すぐにこの変形は出来ない。以上の動きを図形的に考えれば領域が求まります。出題者は、誘導がある通り、tを固定してsのとり得る値を考える解法を期待してますが、これで構わないでしょう。