北海道大学1999年(文・前)第3問

次の命題の真偽を述べ、その真偽を説明せよ。ただし、$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$が無理数であることは用いてよい。

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$は無理数である。

(2) xが実数である時、x^2+xが有理数ならば、xは有理数である。

(3) x, yがともに無理数ならば、$x+y, x^2+y^2$のうち少なくとも一方は無理数である。

北海道大学1999年(文・前)第3問

(回答)

(1) 以下の理由により、真である。

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$が有理数であると仮定すると、p, qとも 0 でなく互いに素な整数として、$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$とおける。

両辺を 2 乗して、$\sqrt{6}=\dfrac{q^2}{2p^2}-\dfrac{5}{2}$なるが、右辺が無理数、左辺が有理数となることから、矛盾する。

(2) 以下の理由により、偽である。

rを有理数として、$x^2+x=r$とおける。

これより、$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4r}}{2}$

ここで、rが$\sqrt{1+4r}$を無理数とするような有理数であった場合、xは無理数である。

例えば、$r=\dfrac{1}{4}$のとき、$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$となり無理数となる。

(3) 以下の理由により、偽である。

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$より、$x+y$とxyがともに有理数となるような無理数x, yが存在すれば、
題意の命題は偽となる。

例えば、$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$のとき、$x, y$がともに無理数であるが、$x+y=0, x^2+y^2=1$となり、

$x+y, x^2+y^2$はともに有理数となる。

(解説)

偽であることを示すには、反例が存在することを示せば十分です。

(1)は、無理数が 2 つあるならべき乗して、1 つの有理数を消すという常套手段。

文系なので、完答率は高くなかったかもしれない。

京都大学1999年(理・前)第5問

以下の問いに答えよ。ただし$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$が無理数であることは使ってよい。

(1) 有理数p,q,rについて$p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$ならば、$p=q=r=0$であることを示せ。

(2) 実数係数に2次式$f(x)=x^2+ax+b$について、$f(1),f\left(1+\sqrt{2}\right),f\left(\sqrt{3}\right)$のいずれかは無理数であることを示せ。

京都大学1999年(理・前)第5問

(回答)

(1) 与式より、$p+q\sqrt{2}=-r\sqrt{3}$

両辺を2乗して、$p^2+2pq\sqrt{2}+2q^2=3r^2$

$pq\neq 0$であると仮定すると、$\sqrt{2}=\dfrac{3r^2-p^2-2q^2}{2pq}$となり、左辺は無理数、右辺は有理数であることから、

矛盾する。　$\therefore pq=0$

(i) $p=0$のとき

$r\neq 0$と仮定すると、$\dfrac{q}{r}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$となり、左辺は有理数、右辺は無理数であることから矛盾する。

$\therefore p=q=r$

(ii) $q=0$のとき

$r\neq 0$と仮定すると、$\dfrac{p}{r}=-\sqrt{3}$となり、左辺は有理数、右辺は無理数であることから矛盾する。

$\therefore p=q=r$

(2) $f(1)=1+a+b\cdots$①

$f\left(1+\sqrt{2}\right)=3+2\sqrt{2}+\left(1+\sqrt{2}\right)a+b\cdots$②

$f\left(\sqrt{3}\right)=3+\sqrt{3}a+b\cdots$③

(i) aとbがともに有理数である場合、③より$f\left(\sqrt{3}\right)$が無理数となる。

(ii) a,bのうち一方のみが無理数である場合、①より$f(1)$が無理数となる。

(iii) aとbがともに無理数である場合

①③より、$f(1)-f\left(\sqrt{3}\right)=-2+\left(1-\sqrt{3}\right)a$

①②より、$f(1)-f\left(1+\sqrt{2}\right)=-2-2\sqrt{2}-\sqrt{2}a$

$(iii-a)$ $a=0$のとき、$f(1)-f\left(1+\sqrt{2}\right)=-2-2\sqrt{2}$より、$f(1),f\left(1+\sqrt{2}\right)$のうち少なくとも一方が無理数

$(iii-b)$ $a\neq 0$のとき、

$$f(1)-f\left(\sqrt{3}\right)=-2+\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left\{f(1)-f\left(1+\sqrt{2}\right)+2+2\sqrt{2}\right\}}{\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left\{f(1)-f\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}+2\sqrt{2}}{2}$$

$f(1),f\left(1+\sqrt{2}\right),f\left(\sqrt{3}\right)$がすべて有理数であるとすると、左辺は有理数であり、右辺は無理数となり矛盾。

これより、$f(1),f\left(1+\sqrt{2}\right),f\left(\sqrt{3}\right)$のいずれかは無理数である。

(解説)

無理数が2つあるならべき乗して、1つの有理数を消しましょう。無理数を片方に集めると矛盾するので、無理数の係数が0です。(2)では、2つの数の差が無理数なら、2つとも無理数か、有理数と無理数が1つずつのどちらかです。

大阪大学2015年(理・前)第3問

以下の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{2}$と$\sqrt[3]{3}$が無理数であることを示せ。

(2) $p, q, \sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q$がすべて有理数であるとする。そのとき、$p=q=0$ であることを示せ。

大阪大学2015年(理・前)第3問

(回答)

(1) $\sqrt{2}$が有理数であると仮定すると、p, qを互いに素かつ 0 でない整数として、$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$とおけるが、

$2p^2=q^2$となり、pもqも 2 で割り切れることになり、p, qが互いに素であることに反するので、
$\sqrt{2}$は無理数である。

$\sqrt[3]{3}$が有理数であると仮定すると、p, qを互いに素かつ 0 でない整数として、$\sqrt[3]{3}=\dfrac{q}{p}$とおけるが、

$3p^3=q^3$となり、qが 3 で割り切れる。そうすると、pも 3 で割り切れ、
p, qが互いに素な整数であることに反するので、$\sqrt[3]{3}$が無理数である。

(2) rを有理数として、$\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q=r$とおける。
$\left(\sqrt[3]{3}q\right)^3=3q^3=\left(r-\sqrt{2}p\right)^3=r^3-3\sqrt{2}pr^2+6rp^2-2\sqrt{2}p^3$

$3pr^2+2p^2\neq 0$ のとき、$\sqrt{2}=-\dfrac{3q^3-r^3-6rp^2}{3pr^2+2p^3}$となるが、無理数 = 有理数となり矛盾するので、

$3pr^2+2p^3=p(3r^2+2p^2)=0$ である。

$p=0$ のときは、$3q^3=r^3$となり、$q\neq 0$ とすると、$\dfrac{r}{q}=\sqrt[3]{3}$より矛盾するので、$p=q=r=0$

$p\neq 0$ のときは、$0\leq 3r^2=-2p^2\leq 0$ となり、明らかに$p=q=r=0$
以上より、題意は示された。

(解説)

有理数は、互いに素な整数p, qを用いて$\dfrac{q}{p}$で表せます。無理数であることの証明は、有理数であると

仮定すると矛盾が生じるので無理数であるという示し方が常套手段です。
(1)はガッツポーズで得点すべき。
(2)は京都大学 1999 年(理・前)第 5 問と同様に 1 つの無理数を消去です。無理数を片方に集めると
矛盾するので、無理数の係数が 0 です。あとは、有理数の和差積商も有理数なことから示せます。

早稲田大学2018年(理工・前)第3問

pを素数、a,b,cを整数とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt[3]{p}$が無理数になることを示せ

(2) $a\left(\sqrt[3]{p}\right)^2+b\sqrt[3]{p}+c=0$ ならば、$ap+b\left(\sqrt[3]{p}\right)^2+c\sqrt[3]{p}=0$ となることを示せ。

(3) $a\left(\sqrt[3]{p}\right)^2+b\sqrt[3]{p}+c=0$ ならば、$bc-a^2p+(b^2-ac)\sqrt[3]{p}=0$ となることを示せ。

(4) $a\left(\sqrt[3]{p}\right)^2+b\sqrt[3]{p}+c=0$ ならば、$a=b=c=0$ となることを示せ。

早稲田大学2018年(理工・前)第3問

（回答）

(1) $\sqrt[3]{p}$が有理数であると仮定すると、m,nを互いに素かつ 0 でない整数として、$\sqrt[3]{p}=\dfrac{n}{m}$とおけるが、

$pm^3=n^3$となり、mもnもpで割り切れることになり、m,nが互いに素であることに反するので、
$\sqrt[3]{p}$は無理数である。

(2) $a\left(\sqrt[3]{p}\right)^2+b\sqrt[3]{p}+c=0$ の両辺に$\sqrt[3]{p}$をかけると、$ap+\ b\left(\sqrt[3]{p}\right)^2+c\sqrt[3]{p}=0$

(3) $c=-a\left(\sqrt[3]{p}\right)^2-b\sqrt[3]{p}$を代入して、

$$bc+a^2p+(b^2-ac)\sqrt[3]{p}=-b\left\{a\left(\sqrt[3]{p}\right)^2+b\sqrt[3]{p}\right\}-a^2p+\left\{b^2+a\left\{a\left(\sqrt[3]{p}\right)^2+b\sqrt[3]{p}\right\}\right\}\sqrt[3]{p}$$

$$=-b\left\{a\left(\sqrt[3]{p}\right)^2+b\sqrt[3]{p}\right\}-a^2p+\left\{b^2\sqrt[3]{p}+a\left\{ap+b\left(\sqrt[3]{p}\right)^2\right\}\right\}\sqrt[3]{p}$$

$$=0$$

(4) $a\neq 0$ と仮定する。

題意より、$ax^2+bx+c=0$ は実数解を持つので、判別式$D=b^2-4ac\geq 0$ である。

これより、$\sqrt[3]{p}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

、この両辺を 3 乗すると、

$$p=\frac{-b^3\pm 3b^2\sqrt{b^2-4ac}-3b(b^2-4ac)\pm(b^2-4ac)\sqrt{b^2-4ac}}{8a^3}\quad\therefore\sqrt{b^2-4ac}=\frac{8a^3p+b^3+3b(b^2-4ac)}{\pm 3b^2\pm(b^2-4ac)}$$

右辺が有理数なので、左辺も有理数となるが、そうすると、$\sqrt[3]{p}$が有理数となってしまうので矛盾する。

以上より、$a=0$ である。

このとき、$b\sqrt[3]{p}=-c$であり、$b\neq 0$ のときは$\sqrt[3]{p}$が有理数になってしまうので、$b=0$

$\therefore a=b=c=0$

（解説）

(1)は、大阪大学 2015 年(理・前)第 3 問の(1)と同様の示し方です。(2)(3)は適当に式をいじっていれば
導ける程度の問題です。(4)はどう示すか迷いましたが、2 次方程式の解であることから、$\sqrt[3]{p}$を
a,b,cで表しました。その後は、京都大学 1999 年(理・前)第 5 問や大阪大学 2015 年(理・前)第 3 問で
見られる無理数を 1 つ消去するパターンです。とはいえ、発想しずらいかもしれません。
(3)まで行ければ、余裕をもって合格ライン、完答すれば上位で合格でしょう。