

東京大学1975年(理・前)第4問

数列 $\{a_n\}$ の項が $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ によって与えられているものとする。このとき、

$a_n = \sin \theta_n, 0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ を満たす θ_n を見いだせ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ を求めよ。

東京大学1975年(前)第4問

(回答)

$$a_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \quad \therefore \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ に注意しながら式変形していくと、

$$\sin \theta_{n+1} = \sqrt{2 + 2 \sin \theta_n} = \sqrt{2 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_n \right)} = 2 \sqrt{\frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_n \right)}{2}} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_n}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_n}{2} \right)$$

$$\text{これより、}\theta_{n+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_n}{2} \text{となり、}\theta_{n+1} - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \left(\theta_n - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore \theta_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(\theta_1 - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{以上より、}\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \frac{\pi}{2}$$

(解説)

三角関数を使った漸化式です。1975 年と非常に古い問題ですが、最近でもこういった問題は多く、

今後もしばらくは類題が多く出題されることでしょう。使う知識は、三角関数の基礎的性質と漸化式の基礎のみ。

名古屋工業大学2017年(前)第3問

θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ をみたす定数とし、自然数 n に対して $a_n = \tan \frac{\theta}{2^n}$ とおく。

(1) 数列 $\{2^n a_n\}$ の極限を求めよ。

(2) n が 2 以上のとき $\frac{1}{a_n} - \frac{2}{a_{n-1}} = a_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}$ とおく。 n が 2 以上のとき S_n を a_1 と a_n で表せ。

(4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ の和を求めよ。

名古屋工業大学2017年(前)第3問

(回答)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ であるので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta \cdot \frac{2^n}{\theta} \cdot \tan \frac{\theta}{2^n} = \theta$

(2) $a_{n-1} = \tan \frac{\theta}{2^{n-1}} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2^n}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2^n}} = \frac{2a_n}{1 - a_n^2}$ なので、 $\frac{1}{a_n} - \frac{2}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_n} - 2 \cdot \frac{1 - a_n^2}{2a_n} = a_n$

(3) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{2^k} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2^k a_k} - \frac{1}{2^{k-1} a_{k-1}} \right) = \frac{a_1}{2} - \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2^n a_n}$

(4) $\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2a_1} = \frac{a_1^2 - 1}{2a_1} = -\frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{2 \tan \frac{\theta}{2}} = -\frac{1}{\tan \theta}$ であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = \theta$ なので、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tan \theta}$

(解説)

$\tan$ を使った数列ですが、必要なのは $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ と $\tan$ の倍角という基礎的な事項のみです。

九州大学2011年(理・前)第3問

数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ は $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1-a_n^2}, n = 1, 2, 3, \dots$ を満たしているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とすると、一般項 a_n を求めよ。

(2) $\tan \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1 = \tan \frac{\pi}{20}$ とすると、 $a_{n+k} = a_n, n = 3, 4, 5, \dots$ を満たす最小の自然数 k を求めよ。

九州大学2011年(理・前)第3問

(回答)

(1) $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\theta = \frac{\pi}{6} \right)$ としたとき、 $a_n = \tan 2^{n-1} \theta$ であることを証明する。

(i) $n = 1$ のとき、明らか

(ii) $n = k$ のとき、 $a_k = \tan 2^{k-1} \theta$ と仮定すると、 $n = k + 1$ のとき、2倍角の公式より $a_{k+1} = \frac{2a_k}{1-a_k^2} = \tan 2^k \theta$

以上より、 $a_n = \tan 2^{n-1} \theta$ である。

次に、 n が3以上の奇数のとき 2^{n-1} を6で割った余りが4であり、 n が偶数のとき 2^{n-1} を6で割った余りが2であることを証明する。

(i) $n = 2, 3$ のとき、 $2^1 = 2, 2^2 = 4$ より上記は成立

(i) $n = 2k, 2k + 1$ のとき、 $2^{2k-1} = 6l + 2, 2^{2k} = 6m + 4 (l, m \text{は整数})$ と仮定すると、

$n = 2k + 2$ のとき、 $2^{2k+1} = 4 \cdot (6l + 2) = 6(4l + 1) + 2$

$n = 2k + 3$ のとき、 $2^{2k+2} = 4 \cdot (6m + 4) = 6(4m + 2) + 4$ となり、 $n = 2k + 2, 2k + 4$ のときも上記は成立

以上より、 $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, n$ が3以上の奇数のとき $a_n = \tan \frac{2}{3} \pi = -\sqrt{3}, n$ が偶数のとき $a_n = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

(2) 半角の公式より、 $\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}, \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}$

(3) (1)より、 $a_n = \tan \frac{2^{n-1}\pi}{20}$ とおけるので、 $\frac{2^{n+k-1}\pi}{20} = \frac{2^{n-1}\pi}{20} + l\pi (l \text{は整数})$

変形すると、 $2^{n-3}(2^k - 1) = 5l$ となり、 $2^k - 1$ は5の倍数であり、これを満たす最小の k は4

このとき、 $\frac{2^{n+3}\pi}{20} = \frac{2^4 \cdot 2^{n-1}\pi}{20} = \frac{(15 + 1) \cdot 2^{n-1}\pi}{20} = 3 \cdot 2^{n-3}\pi + \frac{2^{n-1}\pi}{20}$ となり、確かに題意を満たすので、

求める最小の自然数 k は4である。

(解説)

$\tan$ の2倍角の公式を用いた漸化式であり、標準的な良問である。(1)は $\tan$ を持ち出さずに回答可能であるが、(2)(3)を見据えて一気に証明した。(2)は半角の公式でも加法定理でもなんでもよい。(3)は循環するために必要な条件を求めればよく、整数問題の得意不得意で差がつく。完答したい問題。

広島大学2017年(理・前)第1問

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \tan \frac{\pi}{3}, a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1} + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)により定める。次の問いに答えよ。

(1) $a_2 = \tan \frac{\pi}{6}, a_3 = \tan \frac{\pi}{12}$ であることを示せ。

(2) 一般項 a_n を表す n の式を推定し、それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$ を求めよ。

広島大学2017年(理・前)第1問

(回答)

$$(1) a_2 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + 1} + 1} = \frac{\tan \frac{\pi}{3}}{\sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{3} + 1} + 1} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{1 + \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}}{1 + (2 \cos^2 \frac{\pi}{6} - 1)} = \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\text{同様に、} a_3 = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + 1} + 1} = \frac{\tan \frac{\pi}{6}}{\sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{6} + 1} + 1} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}}{1 + (2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1)} = \tan \frac{\pi}{12}$$

(2) (1)より、 $a_n = \tan \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} \dots$ ①と推測される。

(i) $n = 1$ のとき、(1)より①は成立

(ii) $n = k$ のとき、①が成立すると仮定すると、

$n = k + 1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + 1} + 1} = \frac{\tan \frac{\pi}{2^{k-1} \cdot 3}}{\sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{2^{k-1} \cdot 3} + 1} + 1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^{k-1} \cdot 3}}{1 + \cos \frac{\pi}{2^{k-1} \cdot 3}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2^k \cdot 3} \cos \frac{\pi}{2^k \cdot 3}}{1 + (2 \cos^2 \frac{\pi}{2^k \cdot 3} - 1)} = \tan \frac{\pi}{2^k \cdot 3} \text{ となり、}$$

①は成立する。

$\therefore$ 題意は示された。

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \tan \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3}}{\frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3}} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3} \pi \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3}}{\frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3}} = 1 \right)$$

(解説)

$\tan$ を用いた漸化式であり、超頻出の設定です。一度解いておいて損はない。

(1)(2)は様々な式変形があるが、そのどれかでよく少し試してみればわかるだろう。計算手法は(1)(2)で同じ。

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を使うのではないかと予測しておきたい。