東京大学1975年（理・前）第4問

数列$\{a_n\}$の項が$a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}(n=1,2,3,\cdots)$によって与えられているものとする。このとき、

$a_n=\sin\theta_n, 0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$を満たす$\theta_n$を見いだせ。また、$\lim_{n\to\infty}\theta_n$を求めよ。

名古屋工業大学2017年（前）第3問

θを $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$をみたす定数とし、自然数nに対して$a_n=\tan\dfrac{\theta}{2^n}$とおく。

(1) 数列$\{2^n a_n\}$の極限を求めよ。

(2) nが 2 以上のとき$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{2}{a_{n-1}}=a_n$が成り立つことを示せ。

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}$とおく。$n$が 2 以上のとき$S_n$を$a_1$と$a_n$で表せ。

(4) 無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$の和を求めよ。

九州大学2011年（理・前）第3問

数列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$は$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1-a_n^2}, n=1,2,3,\cdots$を満たしているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$とするとき、一般項a_nを求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$の値を求めよ。

(3) $a_1=\tan\dfrac{\pi}{20}$とするとき、$a_{n+k}=a_n, n=3,4,5,\cdots$を満たす最小の自然数$k$を求めよ。

広島大学2017年（理・前）第1問

数列$\{a_n\}$を$a_1=\tan\dfrac{\pi}{3}, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2+1}+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$により定める。次の問いに答えよ。

(1) $a_2=\tan\dfrac{\pi}{6}, a_3=\tan\dfrac{\pi}{12}$であることを示せ。

(2) 一般項a_nを表すnの式を推定し、それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

(3) $\lim_{n\to\infty}2^n a_n$を求めよ。